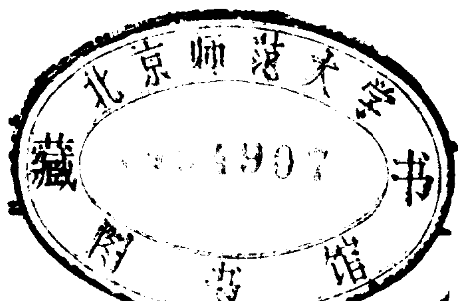
半解析函数
共轭解析函数

王见定　著

北京工业大学出版社

半解析函数、共轭解析函数

王见定　著



北京工业大学出版社

半解析函数、共轭解析函数

王见定 著

*

北京工业大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京工业大学印刷厂印装

*

850×1168毫米 32开本 $3\frac{5}{16}$印张 78千字
1988年12月第1版 1988年12月第1次印刷
印数：1～3000册
ISBN 7—5639—0031—4/G·19
定价：2.50元

简　　介

本书将解析函数进行了全面推广，提出了半解析函数、共轭解析函数的全新概念及相应的理论，并说明了这套理论在电磁场、流体力学、弹性力学、几何变换等领域的应用。该理论比较系统，内容新颖，由于它提供了怎样提出新概念、怎样应用新概念的方法，因而对从事理论研究和应用开发研究的科学工作者是一本重要的参考书。本书还可作为理工科院校复变函数的学习教材.

序

本书分两篇，第一篇提出的半解析函数的概念，将解析函数进行了推广，得到了不少好的结果及应用．第二篇论述的共轭解析函数则是和解析函数对称的一类函数，它是一种具有特殊变化率的复变函数，它几乎和解析函数一样美妙，并在很多领域中有它独到的应用．

半解析函数、共轭解析函数试图把复变函数研究推向立体化．

由于作者的水平所限，书中一定存在不少缺点和错误，恳請批评指正．

王见定

1988年8月于中国人民大学一分校

目　　录

第一篇　半解析函数

第二篇　共轭解析函数

第一章　半解析函数

第一章　半解析函数

§1. 定义

假设函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在域D内连续.

定义 1　称$f(z)$在（x_0,y_0）点是第一类半解析的，若在（x_0,y_0）的一个邻域内u_x、v_y连续，且$u_x=v_y$.

定义 2　称$f(z)$在域D内是第一类半解析的，若对D内任意一点（x，y），$f(z)$是第一类半解析的.

定义 3　称$f(z)$在(x_0，y_0）点是第二类半解析的，若在（x_0，y_0）的一个邻域内u_y、v_x连续，且$u_y=-v_x$.

定义 4　称$f(z)$在域D内是第二类半解析的，若对D内任意一点（x，y），$f(z)$是第二类半解析的.

定义 5　设$f(z)$在区域D内半解析，考虑一个包含D的更大区域G，若存在$F(z)$在G内半解析，且在D内$F(z)=f(z)$，则称$F(z)$为$f(z)$在区域G内的半解析开拓.

定义 6　设D是一个区域，$f(z)$在D内半解析，称二元体$\{D,\ f(z)\}$为一个半解析元素．两个半解析函数当且仅当其区域重合，而且在其内对应的函数相等时，才称为恒等.

§2. 存在性

定理 1　若$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在域D内是解析的，则形如$f^*(z)=[u(x,y)+\varphi(y)]+i[v(x,y)+\psi(x)]$

的函数在 D 内是第一类半解析的.

定理 2 若 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在域 D 内是解析的，则形如 $f^*(z)=[u(x,y)+\psi(x)]+i[v(x,y)+\varphi(y)]$ 的函数在 D 内是第二类半解析的.

其中 $\varphi(y)$，$\psi(x)$ 分别为 D 内的连续函数.

定理1、2根据定义容易验证.

§3. 主要性质

定理 3 第一类（第二类）半解析函数的实系数线性组合仍为第一类（第二类）半解析函数.

定理 3 由定义容易验证.

定理 4 若 $f(z)$ 在域 D 内是第一类半解析的，u_y、v_x 连续，且 $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ 在 D 内是第一类半解析的，则 $f(z)$ 在 D 内是解析的.

证明 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=u+iv$

$$F(z)=\frac{f(z)}{z-z_0}$$

$$=\frac{[u(x-x_0)+v(y-y_0)]+i[v(x-x_0)-u(y-y_0]}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

$$=\xi(x,y)+i\eta(x,y)$$

由于 $\dfrac{\partial\xi}{\partial x}=\dfrac{\partial\eta}{\partial y}$，$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$

不难得到

$$(y-y_0)\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

在 $y-y_0\neq 0$ 的域 D 内，必有 $\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$

故在$y-y_0\neq 0$的域D内，$f(z)$是解析的．

又由u_y、u_x在域D内的连续性，可推出在$y-y_0=0$的直线上也有$\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$，故在域$D$内$f(z)$是解析的．

推论 设$f(z)$在域D内第一类半解析，u_y、v_x连续，则$f(z)$在D内解析$\Longleftrightarrow$存在一点$z_0\in D$，使得

$$f(z)=(z-z_0)\varphi(z)$$

其中$\varphi(z)$在D内是第一类半解析的．

推论容易验证，只须令$\varphi(z)=\frac{f(z)}{z-z_0}$．

定理 5 若$f(z)$在域D内是第二类解析的，u_x、v_y连续，且$\frac{f(z)}{z-z_0}$在D内是第二类半解析的，则$f(z)$在D内是解析的．

推论 设$f(z)$在D内是第二类半解析的，u_x、v_y连续。

$f(z)$在D内是解析的$\Longleftrightarrow$存在一点$z_0\in D$，使得$f(z)=(z-z_0)\varphi(z)$．

其中$\varphi(z)$在D内是第二类半解析的．

定理5及其推论仿定理4及其推论的证明，容易得到．

假定下面所有的围线都是可求长的约当曲线．

定理 6 若$f(z)$在单连通域D内是第一类半解析的，C为D内任意一条围线，则$\int_C f(z)dz$为一实数．

定理6容易验证．

定理6的消弱形式：

定理 7 C为一围线，若$f(z)$在C的内部第一类半解析，在C及其内部组成的闭域G上连续，则$\int_C f(z)dz$为一实数．

为了证明定理7，先看：

引理 对于任一正数δ，任一可求长约当曲线C：$x=x(t)$，$y=y(t)$，$(t_1\leqslant t\leqslant t_2)$的内部能被直线$x=\alpha+m\delta$，$y=\beta+m\delta$（$m=0$，$\pm1$，$\pm2$，…）上的线段分成有限个区域，其中每一个的高度与宽度均小于2δ，α、β由δ取定后适当可取.

下面证明定理7.

证 因为$f(z)$在闭域G上一致连续，
所以对于任意$\varepsilon>0$，总存在$\delta>0$（$\delta<1$）使当

$$|z-z_0|<4\delta \quad \text{时} \qquad (z,\ z_0\in G)$$

有

$$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon \tag{1}$$

由引理，将C之内部分成有限个区域，其中每一个高度和宽度均小于2δ，并用C_1，…，C_N表示这些边界，用S表示由直线$x=\alpha+m\delta$与$y=\beta+m\delta$（$m=0$，±1，±2，…）所形成的正方形系统．假定S的每一个正方形没有一边或几边能将曲线C_n分成两个简单闭曲线，而其中之一为正方形边界.因为如果这样，我们只须用此二闭曲线来代替C_n.显然，每一个C_n是一个可求长的闭约当曲线，而且

$$I_m\int_C f(z)dz=\sum_{n=1}^{N} I_m\int_{C_n} f(z)dz \tag{2}$$

这里所有一切积分均沿正方向取的．不仿设曲线C_1，…，C_N中，前q个并只有q个与C有公共点，其余的都是完全位于C之内部的正方形边界.对它们引用定理6，我们有

$$I_m\int_{C_n} f(z)dz=0$$

从而由(2)式有

$$I_m \int_C f(z)dz = \sum_{n=1}^{q} I_m \int_{C_n} f(z)dz \tag{3}$$

设C、C_n的长度分别为L、L_n. 显然，$\sum_{n=1}^{q} L_n - L$最多等于S中其边含有C的点的诸正方形周界之和，而这些正方形的数目$\leqslant 4(L/\delta+1)$．因为一个长度$<\delta$的弧最多只能同4个这样的正方形有公共点．由于$\delta<1$，我们有

$$\sum_{n=1}^{q} L_n - L \leqslant 16(L/\delta+1) < 16L + 16\delta$$

于是

$$\sum_{n=1}^{q} L_n < 17L + 16 \tag{4}$$

设z_0为C_n内部或C_n之一点，由于C_n直径$<4\delta$，于是对于C_n任一点z，式(1)均成立．于是

$$\left| I_m \int_{C_n} [f(z) - f(z_0)]dz \right| \leqslant \left| \int_{C_n} [f(z) - f(z_0)]dz \right| < \varepsilon L_n \tag{5}$$

但是

$$I_m \int_{C_n} [f(z) - f(z_0)]dz = I_m \int_{C_n} f(z)dz - I_m \int_{C_n} f(z_0)dz = I_m \int_{C_n} f(z)dz$$

由此得到

$$\left| I_m \int_{C_n} f(z)dz \right| < \varepsilon L_n \tag{6}$$

由(3)、(4)、(6)式有

$$\left|I_m\int_C f(z)dz\right|=\left|\sum_{n=1}^{q} I_m\int_{C_n} f(z)dz\right|$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{q}\left|I_m\int_{C_n} f(z)dz\right|\leqslant\sum_{n=1}^{q}\varepsilon L_n<\varepsilon(17L+16)$$

由ε的任意性，故$I_m\int_C f(z)dz=0$．

定理 8 若$f(z)$在单连通域D内是第二类半解析的，C为D内任意一条围线，则$\int_C f(z)dz$为一虚数．

此结论容易证明．

定理 8 的消弱形式：

定理 9 C为一围线，若$f(z)$在C的内部第二类半解析，在C及其内部所组成的闭域G上连续，则$\int_C f(z)dz$为一虚数．

此结论仿定理 7 的证明可以得到．

定理10 设D是围线$C=C_0+C_1+\cdots+C_n$所围成的有几个“洞”的复通区域，$f(z)$在D内是第一类半解析的，则$\int_C f(z)dz$为一实数．

此结论显然成立．

类似地，定理 8 也可以推广到复通区域．

定理11 若$f(z)$沿单连通区域D内的任意一条围线的积分为一实数，u_x、v_y连续，则$f(z)$在D内是第一类半解析的．

证明 设C为D内任一条围线，G为C的所围区域，我们有

$$\int_C f(z)dz=\int_C udx-vdy+i\int_C vdx+udy$$

因为

$$\int_C f(z)dz 为一实数,$$

所以

$$\int_C vdx+udy=0,$$

所以$\iint_C (u_x-v_y)dxdy=\int_C vdx+udy=0.$

由 u_x-v_y 的连续性及沿任一条围线的积分为实数，可推出

$$u_x-v_y=0 \qquad 在G上或成立.$$

定理12 若$f(z)$沿单连通区域D内的任意一条围线的积分为一虚数，u_y、v_x连续，则$f(z)$在D内是第二类半解析的.

此结论仿定理11的证明容易得到.

易知上述两个结论对于复通区域也成立.

定理13 若$f(z)$在域D内是第一（二）类半解析的，则$if(z)$在域D内是第二（一）类半解析的.

此结论很容易验证. 它表明两类半解析函数的相互转化，实际上是几何上的一种特殊的90°旋转.

定理14 若$f(z)$是第二类半解析的，则一定存在实函数$\varphi(x, y)$使得$\overline{f(z)}=\nabla\varphi(x, y)$，且这样的$\varphi(x, y)$有无穷多个，但彼此相差一个常数. 反之，若$\overline{f(z)}=\nabla\varphi(x, y)$，则$f(z)$是第二类半解析的.

其中 $\nabla\varphi(x,y)\equiv\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$

证明 设$f(z)=u+iv$. 因为$f(z)$是第二类半解析的，所以

$$\int_C udx-vdy=0 \qquad (C为任一围线)$$

故可定义

$$\varphi(x, y) \triangleq \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} u dx - v dy$$

于是

$$\varphi(x+\Delta x, y) - \varphi(x, y) = \int_{(x, y)}^{(x+\Delta x, y)} u dx - v dy$$

$$= u(x+\theta\Delta x, y)\Delta x \qquad (0<\theta<1)$$

所以

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x+\Delta x, y) - \varphi(x, y)}{\Delta x} = u(x, y)$$

即

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u(x, y)$$

同理可证

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -v(x, y)$$

所以

$$\overline{f(z)} = \nabla \varphi(x, y)$$

显然，这样的$\varphi(x, y)$不止一个，且彼此相差一个常数．逆定理也容易验证．

定理15 若$f(z)$是第一类半解析的，则一定存在实函数$\varphi(x, y)$使得$\overline{if(z)} = \nabla\varphi(x, y)$，且这样的$\varphi(x, y)$有无穷多个，但彼此相差一个常数．反之，若$\overline{if(z)} = \nabla\varphi(x, y)$，则$f(z)$是第一类半解析的．

证明 因为$f(z)$是第一类半解析的，所以$if(z)$是第二类半解析的，于是定理15的证明转为定理14的证明．

定理16 若$f(z) = (u(x, y), v(x, y))$是第一类半解析的，则一定存在$\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$，使得

$\mathbf{a} = (u(,y),\ -v(x,y),\ w(x,y)) = \nabla\times\mathbf{b}$. 相反的，
若$\mathbf{a} = (u(x,y),\ -v(x,y),\ w(x,y)) = \nabla\times\mathbf{b}$，则
$f(z) = (u(x,y),\ v(x,y))$ 一定是第一类半解析的，且满足$\mathbf{a} = \nabla\times\mathbf{b}$的$\mathbf{b}$有无穷多个，但彼此相差一个$\nabla\varphi$.

$$\text{其中}\quad \nabla\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

定理 17 若$f(z) = (u(x,y), v(x,y))$是第二类半解析的，则一定存在$\mathbf{b} = (b_x,\ b_y,\ b_z)$使得
$\mathbf{a} = (-v(x,y),\ -u(x,y),\ w(x,y)) = \nabla\times\mathbf{b}$. 相反的，
若$\mathbf{a} = (-v(x,y),\ -u(x,y),\ w(x,y)) = \nabla\times\mathbf{b}$，则
$f(z) = (u(x,y),\ v(x,y))$ 一定是第二类半解析的，且满足$\mathbf{a} = \nabla\times\mathbf{b}$的$\mathbf{b}$有无穷多个，但彼此相差一个$\nabla\varphi$.

以上两个结论的证明类似定理14、15的证明.

定理 18 $\{D_1,\ f_1(z)\}$，$\{D_2,\ f_2(z)\}$为二个同类的半解析元素.

(1) 区域D_1和D_2有一个公共域d_{12}，D_1及D_2互不包含.

(2) $f_1(z) = f_2(z)$，$z\epsilon d_{12}$，

则$\{D_1 + D_2,\ F(z)\}$也是一个半解析元素.

$$\text{其中}\quad F(z) = \begin{cases} f_1(z) & z\epsilon D_1 - d_{12} \\ f_2(z) & z\epsilon D_2 - d_{12} \\ f_1(z) = f_2(z) & z\epsilon d_{12} \end{cases}$$

定理 19 $\{D_1,\ f_1(z)\}$，$\{D_2,\ f_2(z)\}$为二个同类半解析元素.（此处以第一类为例）

(1) 区域D_1与D_2不相交，但有一段公共边界，除掉其端点后的开弧记为Γ.

(2) $f_1(z)$、$u_x^{(1)}$、$v_y^{(1)}$在$D_1+\Gamma$上连续，

$f_2(z)$、$u_x^{(2)}$、$v_y^{(2)}$在$D_2+\Gamma$上连续，

则$\{D_1+\Gamma+D_2, F(z)\}$也是一个半解析元素.

$$其中，F(z)=\begin{cases} f_1(z) & z\in D_1 \\ f_1(z)=f_2(z) & z\in\Gamma \\ f_2(z) & z\in D_2 \end{cases}$$

以上两个结论由定理6、8、11、12仿解析开拓容易证明，且开拓一般不是唯一的.

§4. 物理背景

为叙述方便，下面以流体力学为例.

设流体在z平面某一区域D内作定常流动，$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$表示$z\in D$处的流速，$u(x,y)$、$v(x,y)$分别是$f(z)$的水平及垂直分速. 现考察流体单位时间流过γ的流量.

设 N_γ为单位时间内流过γ的流量，

Γ_γ为流速的环量，

则

$$N_\gamma=\int_\gamma\left(u\frac{dy}{ds}-v\frac{dx}{ds}\right)ds=\int_\gamma -vdx+udy$$

$$\Gamma_\gamma=\int_\gamma\left(u\frac{dx}{ds}+v\frac{dy}{ds}\right)ds=\int_\gamma udx+vdy$$

写成复数形式：

$$\Gamma_\gamma+iN_\gamma=\int_\gamma udx+vdy+i\int_\gamma -vdx+udy$$

$$=\int_\gamma\overline{f(z)}\,dz$$

我们称$\overline{f(z)}$为复速度.

假设在流动过程中，D中无源漏，C为D内任一条围线，由于不可压缩性，$N_c=0$，故

$$\int_C \overline{f(z)}\,dz=\Gamma_C=\int_C u\,dx+v\,dy$$

假设u_x、v_y连续，由定理11可知$\overline{f(z)}$在D内是第一类半解析的.

相反，如果一个流动的复速度是第一类半解析的，则沿D内任一围线C的积分

$$\int_C \overline{f(z)}\,dz=\int_C u\,dx+v\,dy,\quad N_C=0$$

故在D内流体是无源漏的.

于是我们得到：

定理 20 定常平面流动在D内无源的$\Longleftrightarrow$在D内流动的复速度是第一类半解析的.

同样考察无旋的情形，容易得到：

定理 21 定常平面流动在D内无旋的$\Longleftrightarrow$在D内流动的复速度是第二类半解析的.

以上两个结论，适合于一切定常平面向量场. 由此可见，无散场、无旋场（平面）的所有性质均可搬到半解析函数中去，而半解析函数的所有性质亦可应用到无散场、无旋场中去.

§5. 复变函数分解定理

下面我们可以看到相当广泛的复变函数与半解析函数有着直接的联系，这使半解析函数的研究具有特殊的意义，这一点使解析函数相形见拙.

定理 22 有限域D内一阶偏导Hölder连续的$f(z)$可以

分解成两个半解析函数的和.

即 $$f(z)=f_1(z)+f_2(z)$$

其中$f_1(z)$、$f_2(z)$分别为第一、二类半解析函数.

为了证明上述结论，我们做些必要的准备工作.

称$\mu(x,y,z)$在域D内Hölder连续，若对任意的两点P、$Q\in D$，有 $|\mu(P)-\mu(Q)|\leqslant K\overline{PQ}^{\alpha}$.

其中$\overline{PQ}$是P、Q间的距离，K、α是常数，$0<\alpha<1$.

称$\boldsymbol{\mu}(x,y,z)=(\mu_1(x,y,z),\mu_2(x,y,z),\mu_3(x,y,z))$ Hölder连续，若$\mu_1(x,y,z)$，$\mu_2(x,y,z)$，$\mu_3(x,y,z)$，都Hölder连续.

***引理** 若$\mu(x,y,z)$在域D内Hölder连续，则一定存在两次连续可微的$G(x,y,z)$使

$$\nabla^2 G(x,y,z)=-4\pi\mu(x,y,z)$$成立.

显然，以上结论也适合矢量的情形，

即 $$\nabla^2\mathbf{G}(x,y,z)=-4\pi\boldsymbol{\mu}(x,y,z)$$

下面我们来证明定理22.

证 由 $\nabla^2\psi=\nabla\cdot\mathbf{K}$

可得出

$$\psi=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{\nabla_\xi\cdot\mathbf{K}}{r}dv_\xi$$

由 $$\nabla^2\boldsymbol{\phi}=-\nabla\times\mathbf{K}$$

可得出

$$\boldsymbol{\phi}=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\nabla_\xi\times\mathbf{K}}{r}dv_\xi$$

由引理，当$\mathbf{K}$的一阶偏导Höler连续时，ψ、φ都是二次连续可微的.

不难推出：

$$\mathbf{K}=\nabla\times\boldsymbol{\varphi}+\nabla\psi \qquad **$$

显然，$\nabla\times\boldsymbol{\varphi}$是无散的，$\nabla\psi$是无旋的.

设$f(z)=(u,v)$，则$\overline{f(z)}=(u,\ -v)$　取

$$\mathbf{K}=(u,\ -v,\ o)$$

因为 $f(z)$的一阶偏导Hölder连续，所以 $\mathbf{K}$的一阶偏导也Hölder连续，因此 **对此$\mathbf{K}$也成立.

即
$$\begin{aligned}\mathbf{K}&=\nabla\times\boldsymbol{\varphi}+\nabla\psi\\&=(K_x^{(1)},K_y^{(1)},K_z^{(1)})+(K_x^{(2)},K_y^{(2)},K_z^{(2)})\end{aligned}$$

不难验证$(K_x^{(2)},\ K_y^{(2)})$是无旋的.

事实上，

$$\nabla\psi=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x},\ \frac{\partial\psi}{\partial y},\ \frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$$

所以

$$\begin{aligned}\nabla\times(K_x^{(2)},K_y^{(2)})&=\nabla\times\left(\frac{\partial\psi}{\partial x},\ \frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\\&=\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}=0\end{aligned}$$

下面证明$(K_x^{(1)},\ K_y^{(1)})$是无散的.

由$\mathbf{K}=\nabla\times\boldsymbol{\varphi}+\nabla\psi$知道

$$\nabla\times\boldsymbol{\varphi}=\nabla\times\frac{1}{4\pi}\int\frac{\nabla_\xi\times\mathbf{K}}{r}dv_\xi$$

分析上式

$$\begin{aligned}\nabla_\xi\times\mathbf{K}&=\nabla_\xi\times(K_\xi(\xi,\ \eta),\ K_\eta(\xi,\ \eta),\ 0)\\&=\left(0,\ 0,\ \frac{\partial K_\eta}{\partial\xi}-\frac{\partial K_\xi}{\partial\eta}\right)\end{aligned}$$

所以

$$\nabla\times\boldsymbol{\varphi}=\nabla\times\left(0,\ 0,\ \frac{1}{4\pi}\int\frac{\frac{\partial K_\eta}{\partial\xi}-\frac{\partial K_\xi}{\partial\eta}}{r}dv_\xi\right)$$

$$= (K_x^{(1)},\ K_y^{(1)},\ 0)$$

因为

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{\varphi})=0$$

即

$$\frac{\partial K_x^{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial K_y^{(1)}}{\partial y}+\frac{\partial o}{\partial z}=0$$

于是

$$\frac{\partial K_x^{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial K_y^{(1)}}{\partial y}=0$$

因此

$(K_x^{(1)},\ K_y^{(1)})$ 无散.

而

$$(u,\ -v)=(K_x^{(1)},\ K_y^{(1)})+(K_x^{(2)},\ K_y^{(2)})$$

取

$$\overline{f_1(z)}=(K_x^{(1)},\ K_y^{(1)}),\ \overline{f_2(z)}=(K_x^{(2)},\ K_y^{(2)})$$

则

$$\overline{f(z)}=\overline{f_1(z)}+\overline{f_2(z)}$$

于是

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z)$$

由半解析函数的物理背景可知，$f_1(z)$、$f_2(z)$分别是第一、二类半解析函数，于是定理得证.

只要仔细观察定理22的证明过程，我们发现对另一类函数也可以分解，即

定理23 闭域上二次连续可微的复变函数 $f(z)$ 可以分解成两个半解析函数的和.

即 $$f(z)=f_1(z)+f_2(z)$$

其中，$f_1(z)$，$f_2(z)$ 分别为第一、二类半解析函数.

第二章　半解析函数对平面场论的发展

半解析函数的研究可以深化对平面场的认识，初步看来有：

定理 1　无散场和无旋场经各点为中心同向 90° 旋转相互转化．

此结论由第一章定理13、定理20、定理21明显看出．

定理 2　若一个无散场（无旋场）经以各点为中心的同向 90° 旋转仍然是无散的（无旋的），则这个场是调和场．

此结论可以用来判断无散场（无旋场）是不是调和场．

这个结论可以简单解释如下：一个无散场经以各点为中心的同向90°旋转后仍然是无散的，根据定理1，它也应该是无旋的，于是它既无散又无旋，故为调和场．

定理 3　有限域D内一阶偏导Hölder连续（有限闭域上二次连续可微）的平面场可分解成一个无散的平面场和一个无旋的平面场．

此结论是第一章定理22、23的直接推论．

*补充：近几年来有一些数学、物理工作者在进行半解析函数的研究，下面就作者见到的试举一二．

结论 1　设$f_n(z)=u_n+iv_n$是第一类半解析的，$n=1, 2\cdots$，$f(z)=u+iv$是区域D内的复函数，且满足

*：见参考文献[12]

(1) $\lim\limits_{n \leftarrow \infty} f_n(z) = f(z)$

(2) 函数列$\left\{\dfrac{\partial u_n}{\partial x}\right\}$在域$D$内一致收敛，

则$f(z)$是第一类半解析的.

结论 2 设$f_n(z) = u_n + iv_n$是第二类半解析的，$n = 1, 2, \cdots$，$f(z)$是区域D内的复函数，且满足

(1) $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(z) = f(z)$

(2) 函数列$\left\{\dfrac{\partial u_n}{\partial y}\right\}$在区域$D$内一致收敛，

则$f(z)$是第二类半解析的.

对于半解析开拓有：

结论 3 设

(1) D和D^*分别为z的上半平面与下半平面的两个区域，关于实轴对称且它们的边界都包含实轴上一条线段S.

(2) $\{D+S, f(z)\}$为第一（二）类半解析元素，$f(z)$在$D+S$上连续，且在S上取实数值.

则函数

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & z \in D+S \\ \overline{f(\overline{z})} & z \in D^* \end{cases}$$

在区域$D+S+D^*$上为第一(二)类半解析函数，亦即$F(z)$为区域$D+S+D^*$上的半解析开拓. 最后指出，这种开拓不具有唯一性.

第二篇　共轭解析函数

第一章　共轭解析函数

§1. 定义

1.　共轭导数与共轭解析函数的概念

设函数$w=f(z)$于区域D内有定义，给自变量$z\in D$以增量$\Delta z=\Delta x+i\Delta y(z=x+iy)$，使$(z+\Delta z)\in D$，并计算由于自变量所引起的函数$w=f(z)$的增量：

$$\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)$$

如果Δz按任意方式趋于零时比值$\dfrac{\Delta w}{\overline{\Delta z}}$的极限存在，其值有限，则称此极限为函数$f(z)$在点$z$的共轭导数，记为$f^0(z)$：

$$f^0(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\overline{\Delta z}} \tag{1}$$

这时称函数$f(z)$于z点共轭可导或共轭可微.

例1　$f(z)=\overline{z}$在复平面上处处共轭可导.

证　$\dfrac{\Delta f}{\overline{\Delta z}}=\dfrac{\overline{z+\Delta z}-\overline{z}}{\overline{\Delta z}}=\dfrac{\overline{z}+\overline{\Delta z}-\overline{z}}{\overline{\Delta z}}=1$

所以　$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\overline{\Delta z}}=1$$

因此，$f(z)=\overline{z}$ 在复平面上处处共轭可导，且 $f^{0}(z)=1$.

例2　试证 $f(z)=\overline{z^{n}}$ 在复平面上处处共轭可导，且 $f^{0}(z)=n\overline{z^{n-1}}$.

证　设 z 是任意固定的点，我们有

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{(z+\Delta z)^{n}}-\overline{z^{n}}}{\overline{\Delta z}}=\lim_{\Delta z\to 0}\left[n\overline{z^{n-1}}+\frac{n(n-1)}{2}\overline{z^{n-2}}\,\overline{\Delta z}+\cdots+(\overline{\Delta z})^{n-1}\right]$$

$$=n\overline{z^{n-1}}$$

定义1　若函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内处处共轭可导，则称 $f(z)$ 为区域 D 内的共轭解析函数，或称 $f(z)$ 于区域 D 内共轭解析.

在区域 D 内，若除了某些例外点外，$f(z)$ 在 D 内各点共轭解析，则这些例外点称为 $f(z)$ 在 D 内的奇点.

例如 $w=\dfrac{1}{z}$ 在 z 平面内以 $z=0$ 为奇点.

我们知道，解析函数在一点解析，就可推出其各阶导数在该点解析，并且可以展成幂级数. 以后，我们可以看到共轭解析函数与解析函数一样优美.

容易验证：

(1) 若 $f_1(z)$，$f_2(z)$ 在区域 D 内共轭解析，则其和、差、积、商（在商的情形，要求分母在 D 内不为零）在 D 内共轭解析，并且：

$$(f_1(z)+f_2(z))^{0}=f_1^{0}(z)+f_2^{0}(z)$$

$$(f_1(z)\cdot f_2(z))^{0}=f_1^{0}(z)\cdot f_2(z)+f_1(z)\cdot f_2^{0}(z)$$

$$\left(\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right)^0=\frac{f_1^0(z)\cdot f_2(z)-f_1(z)\cdot f_2^0(z)}{[f_2(z)]^2}$$

$[f_2(z)\neq 0]$

(2) 复合函数的共轭求导法则

设函数 $\xi=f(z)$在区域 D 内共轭解析，函数$w=g(\overline{\xi})$在区域 G 内共轭解析，若对于 D 内每一点，函数 $\overline{f(z)}$ 的值$\overline{\xi}$均属于G，则$w=g(\overline{f(z)})$在 D 内共轭解析，且

$$(g(\overline{f(z)}))^0=g^0(\overline{\xi})\cdot f^0(z)$$

(3) 反函数求导法则

设 $w=f(z)$ 在域 D 内共轭解析，且$f^0(z)\neq 0$，$z\in D$. P 为 z 在 D 上变化时 $w=f(z)$所取值的集合. 设 $z=\psi(w)$是函数$f(z)$的单值反函数，且在 P上连续，则$z=\psi(w)$在P上共轭解析，且

$$\psi^0(w)=\frac{1}{f^0(\overline{\psi(w)})}$$

2. 共轭解析条件

假设 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 是复变数 $z=x+iy$ 的一个定义在区域 D 内的函数. 一般说来，如果函数 u 与v互相独立，即使函数 $u(x,y)$及$v(x,y)$对 x 与 y 的所有偏导数都存在，函数 $f(z)$通常仍不是共轭可微的. 例如 $w=z=x+iy$ 处处连续，并且 $u=x$，$v=y$ 对 x 和 y 的一切偏导数都存在. 由定义容易验证，$w=z$ 却处处不是共轭可微的. 因此，若函数 $f(z)$是共轭可微的，它的实部u与虚部 v 应当不是互相独立的，而必须适合一定的条件. 下面我们就来研究这种条件.

若$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在一点共轭可微，而且设

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\overline{\Delta z}}=f^0(z) \qquad (2)$$

令 $\overline{\Delta z}=\Delta x-i\Delta y,\ f(z+\Delta z)-f(z)=\Delta u+i\Delta v$

其中 $\Delta u=u(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-u(x,\ y)$

$\Delta v=v(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-v(x,\ y)$

(2)式变为

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x-i\Delta y}=f^0(z) \qquad (3)$$

因为 $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ 无论按什么方式趋于零时，(3)式总是成立的．先令 $\Delta y=0$，$\Delta x\to 0$，即动点沿平行于实轴的方向趋于 z 点，此时(3)式变为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=f^0(z)$$

于是

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial x}\text{必然存在，}$$

且有

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=f^0(z) \qquad (4)$$

同样，让 $\Delta x=0$，$\Delta y\to 0$，(3)式变为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{-i\Delta y}=i\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta y}-\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta y}=f^0(z)$$

故知

$$\frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial y}\text{亦必存在，}$$

且有

$$i\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}=f^0(z) \tag{5}$$

比较(4)式及(5)式得出

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x} \qquad *$$

这是关于 u 及 v 的偏微分方程组，称为共轭解析条件。

总结以上讨论，即得下述结论：

定理1 （共轭可微的必要条件）

设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内有定义，且在 D 内的一点 $z=x+iy$ 共轭可微，则 $u(x,y)$、$v(x,y)$ 在此点有偏导数 u_x、u_y、v_x、v_y，且满足共轭解析条件.

由下例可见定理中的条件不是充分的.

例4 函数 $f(z)=\sqrt{|xy|}$ 在 $z=0$ 处满足定理1中的条件，但在 $z=0$ 处不是共轭可微的.

证 因为 $u(x,y)=\sqrt{|xy|}$, $v(x,y)=0$

$$u_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(\Delta x,0)-u(0,0)}{\Delta x}=0=v_y(0,0)$$

$$u_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(0,\Delta y)-u(0,0)}{\Delta y}=0=-v_x(0,0)$$

而

$$\frac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\frac{\sqrt{|\Delta x|\ |\Delta y|}}{\Delta x-i\Delta y}$$

在 $\Delta z\to 0$ 时，无极限，这只要令 $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ 沿射线 $\Delta y=K\Delta x\ (\Delta x>0)$ 随 $\Delta x\to 0$ 时而趋于零，即知上述比值是一个与 K 有关的值 $\frac{\sqrt{|K|}}{1+Ki}$.

我们把定理1的条件适当加强，就得到：

定理2 （共轭可微的充分必要条件）

设函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在区域D内有定义，则$f(z)$在D内一点$z=x+iy$共轭可微的充分必要条件是：

(1) 二元函数$u(x,y)$，$v(x,y)$在点(x,y)可微.

(2) $u(x,y)$，$v(x,y)$在点(x,y)满足共轭解析条件.

上述条件满足时，$f(z)$在点$z=x+iy$的共轭导数可以表示为下列形式之一：

$$f^0(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial u}{\partial y} \quad (6)$$

证 必要性 设$f(z)$在D内一点z共轭可微，则

$$\Delta f(z)=f^0(z)\overline{\Delta z}+\eta\overline{\Delta z} \quad (7)$$

其中η是随$\Delta z\to 0$而趋于零的复数.

若令 $f^0(z)=\alpha+i\beta$，$\Delta z=\Delta x+i\Delta y$，

$\Delta f(z)=\Delta u+i\Delta v$

则(7)式可写成

$$\Delta u+i\Delta v=\alpha\Delta x+\beta\Delta y+i(\beta\Delta x-\alpha\Delta y)+\eta_1+\eta_2$$

这里，$\eta_1=R_e(\eta\cdot\overline{\Delta z})$，$\eta_2=I_m(\eta\cdot\overline{\Delta z})$，它们是$|\overline{\Delta z}|=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$的高阶无穷小.

比较上式的实、虚部，即得

$$\Delta u=\alpha\Delta x+\beta\Delta y+\eta_1$$

$$\Delta v=\beta\Delta x-\alpha\Delta y+\eta_2$$

由数学分析中二元函数定义，可知$u(x,y)$与$v(x,y)$在

点 (x, y) 可微，且

$$u_x=\alpha=-v_y, \qquad u_y=\beta=v_x$$

充分性　由 $u(x, y)$ 及 $v(x, y)$ 的可微性知在点 (x, y) 处有

$$\Delta u=u_x\Delta x+u_y\Delta y+\eta_1$$
$$\Delta v=v_x\Delta x+v_y\Delta y+\eta_2$$

其中 η_1 及 η_2 是 $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 的高阶无穷小，再由共轭解析条件，可令

$$\alpha=u_x=-v_y, \quad u_y=v_x=\beta$$

于是

$$\begin{aligned}\Delta f=\Delta u+i\Delta v&=\alpha\Delta x+\beta\Delta y+\eta_1+\\&+(\beta\Delta x-\alpha\Delta y+\eta_2)\\&=(\alpha+i\beta)(\Delta x-i\Delta y)+\eta_1+\eta_2\end{aligned}$$

或

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\alpha+i\beta+\eta$$

其中 $\eta=\dfrac{\eta_1+i\eta_2}{\Delta x-i\Delta y}$ 随 $\Delta z\to 0$ 而趋于零.

由于 $|\eta|=\left|\dfrac{\eta_1+i\eta_2}{\Delta x^2+\Delta y^2}\right|\leqslant\dfrac{|\eta_1|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y}}+\dfrac{|\eta_2|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$

所以 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta z}=\alpha+i\beta$

即
$$\begin{aligned}f^0(z)=\alpha+i\beta=u_x+iv_x&=-v_y+iv_x\\=u_x+iu_y&=-v_y+iu_y\end{aligned}$$

总结定理 1 及定理 2，我们得到一个刻划函数在区域 D 内共轭解析的定理.

定理3 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ 在区域 D 内共轭解析的充分必要条件是

(1) u_x、u_y、v_x、v_y 在 D 内连续.

(2) 在 D 内处处满足共轭解析条件.

证 充分性 因为 u_x, u_y, v_x, v_y 在 D 内连续，保证了 $u(x, y)$、$v(x, y)$ 在 D 内各点的微分均存在，所以由定理1、2可以推出 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ 在D内共轭解析.

必要性 在本章，我们将证明 $f^0(z)$ 是连续的，于是必要性立刻得证.

例 5 试证 $f(z)=e^x(\cos y-i\sin y)$在复平面上共轭解析，且 $f^0(z)=f(z)$,

证 因 $u(x, y)=e^x\cos y$, $v(x, y)=-e^x\sin y$,

而
$$u_x=e^x\cos y,\quad u_y=-e^x\sin y$$
$$v_x=-e^x\sin y,\quad v_y=-e^x\cos y$$

显然 u_x、u_y、v_x、v_y 在 z 平面上处处连续，且$u_x=-v_y$、$u_y=v_x$，满足共轭解析条件. 由定理3知$f(z)$在z平面上共轭解析，并且

$$f^0(z)=u_x+iv_x=e^x\cos y-ie^x\sin y=f(z)$$

3. 由共轭解析函数条件所得的推论

推论 1 若 $f(z)$在区域D内共轭解析，且 $f^0(z)=0$、$(z\in D)$，则在 D 内 $f(z)=$常数.

证 由假设 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$在 D 内每点共轭解析，且$f^0(z)=u_x+iv_x=-v_y+iu_y=0$.

所以，在 D 内必有

$$u_x=0,\quad u_y=0,\quad v_x=0,\quad v_y=0$$

于是，在 D 内 u、v 必是常数，即在D内$f(z)=$常数

推论2 若 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内共轭解析，且 $f^0(z)\neq 0$ $(z\in D)$，则

$$u(x,y)=C_1,\quad v(x,y)=C_2\quad (C_1, C_2\text{为常数})$$

是 D 内两组正交曲线族。

证 因 $f^0(z)\neq 0$ $(z\in D)$，故在 (x,y) 点 u_x、v_x 必不全为零。

(1) 设在 (x,y) 点 $u_x\neq 0$，由共轭解析条件，当然还有 $v_y\neq 0$，曲线 $u(x,y)=C_1$ 的斜率由

$$0=du=u_x dx+u_y dy$$

求得
$$K_u=-\frac{u_x}{u_y}$$

同理可求得曲线 $v(x,y)=C_2$ 的斜率：

$$K_v=-\frac{v_x}{v_y}$$

故在 (x,y) 点，$K_u\cdot K_v=\frac{u_x}{u_y}\cdot\frac{v_x}{v_y}=\frac{-v_y}{v_x}\cdot\frac{v_x}{v_y}=-1$，

所以曲线 $u(x,y)=C_1$ 与 $v(x,y)=C_2$ 在 (x,y) 点正交。

(2) 在 (x,y) 点，若不是"$u_x\neq 0$ 且 $v_y\neq 0$"的情形，此时过交点的两条切线，必然一条为水平切线，另一条是铅直切线，它们在交点处正交。

最后指出，当 $z_0=x_0+iy_0\in D$，$f^0(z_0)\neq 0$ 时，则两曲线

$$u(x,y)=u(x_0,y_0),\quad v(x,y)=v(x_0,y_0)$$

必在 (x_0,y_0) 处正交。

§2. 共轭解析函数与调和函数的关系

在下一节，我们将证明在区域 D 内共轭解析的函数具有任意阶共轭导数，而共轭解析函数的实部 u 与虚部 v 的偏导

数都是连续的。因此，特别地，在区域 D 内 u、v 都有二阶连续偏导数。现在我们来研究应该如何选择 u 和 v 才能使函数 $u+iv$ 在区域 D 内共轭解析。

设 $f(z)=u+iv$ 在区域D内共轭解析，则由共轭解析条件， $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y}$， $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$

得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}=-\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

因 $\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$ 与 $\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$ 在 D 内连续，所以 $\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$

故在 D 内

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=0$$

同理，在 D 内有

$$\frac{\partial^2 v}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

可见，u、v均为D 内的调和函数.

定义2 区域D内满足共轭解析条件的两个调和函数 u、v 中，v 称为 u 的共轭调和函数.

由上面的讨论，我们已经证明了：

定理 4 若 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在域 D 内共轭解析，则 $v(x,y)$ 必为 $u(x,y)$ 的共轭调和函数.

反过来，若 u、v 是任意选取的在区域D内的两个调和函数，则 $u+iv$ 在内不一定共轭解析.

要想 $u+iv$ 在单连通区域内共轭解析，u 及 v 还必须满足共轭解析条件，即 v 必须是 u 的共轭调和函数. 由此，若

已知实部u（或虚部v），就可以求虚部v（或实部u）.

我们知道

$$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=\frac{\partial u}{\partial y}dx-\frac{\partial u}{\partial x}dy \qquad (8)$$

由于u是调和函数，所以函数$\frac{\partial u}{\partial y}$及$-\frac{\partial u}{\partial x}$满足

$$-\frac{\partial\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=$$

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=0$$

而D是一个单连通区域，从数学分析中知道，积分与路经无关．因而从(8)式得到

$$v=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\frac{\partial u}{\partial y}dx-\frac{\partial u}{\partial x}dy+C \qquad (9)$$

其中C为任意常数．

将(9)式分别对x, y求偏导数得

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial x}$$

这就是共轭解析条件．由定理3知$u+iv$在D内共轭解析，故得：

定理 5　设$u(x,y)$是单连通域D内的调和函数，则存在由(9)式确定的函数$v(x,y)$，使$u+iv=f(z)$是D内的共轭解析函数．

注　若D非单连通，则积分(9)可能规定一个多值函数．

例6 试求以调和函数 $u(x,y)=x^3-3xy^2$ 为实部的共轭解析函数 $f(z)$，使 $f(0)=i$。

解 $v(x,y)\xlongequal{(9)}\int_{(0,0)}^{(x,0)}-6xydx+(3y^2-3x^2)dy+$

$$+\int_{(x,0)}^{(x,y)}-6xydx+(3y^2-3x^2)dy+C$$

$$=\int_0^y(3y^2-3x^2)dy+C$$

$$=y^3-3x^2y+C$$

$$f(z)=u+iv=x^3-3xy^2+i(y^3-3x^2y+c)$$
$$=(x-iy)^3+ic=\bar{z}^3+ic$$

因 $f(0)=i$，所以 $f(0)=\bar{0}^3+ic=i$，$c=1$

故 $$f(z)=\bar{z}^3+i.$$

§3 共轭解析函数与解析函数的关系

这一节，我们讨论共轭解析函数与解析函数的关系．我们发现共轭解析函数与解析函数关于实轴对称，以下各章可以看到它几乎具有解析函数的一切类似性质．

定理 6 若 $f(z)$ 在域 D 内是共轭解析的，则 $\overline{f(z)}$ 在域 D 内是解析的．

证 由定理 3，因为 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 D 内共轭解析，所以 u_x、u_y、v_x、v_y 在 D 内连续，且满足共轭解析条件

$$u_x=-v_y,\qquad u_y=v_x$$

显然 $\overline{f(z)}=u(x,y)-iv(x,y)$ 它的实部、虚部的一阶偏

导数是连续的，且满足$C—R$方程组，故$\overline{f(z)}$在域D内是解析的.

相反的，容易证明：

定理 7 若$f(z)$在域D内是解析的，则$\overline{f(z)}$在D内是共轭解析的.

由定理6、定理7，我们有

定理 8 $f(z)$在域D内共轭解析的充分必要条件是$\overline{f(z)}$在域D内解析.

由此，我们得到启示，共轭解析函数的共轭导数是否可以借助解析函数的导数求得．事实上是可以的.

定理 9 若$f(z)$在点(x, y)处是共轭可导的，则$f(z)$在(x, y)处的共轭导数等于它所对称的解析函数在(x, y)处的导数的共轭，即

$$f^0(z) = \overline{(\overline{f(z)})'}$$

证 设 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$

则 $\overline{f(z)}=u(x, y)-iv(x, y)$

$\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)$，$\overline{\Delta w}=\overline{f(z+\Delta z)}-\overline{f(z)}$

由定理8，$\overline{f(z)}$在(x, y)是可导的，且

$$\left(\overline{f(z)}\right)'=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta w}}{\Delta z}$$

于是

$$\overline{\left(\overline{f(z)}\right)'}=\overline{\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta w}}{\Delta z}}=\lim_{\Delta z\to 0}\overline{\left(\frac{\overline{\Delta w}}{\Delta z}\right)}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\overline{\Delta z}}=f^0(z)$$

由于解析函数具有任意阶导数，由定理8、定理9，共轭解析函数也具有任意阶共轭导数，且共轭解析函数的 n 阶共轭导数等于与其对称解析函数的 n 阶导数的共轭，即

定理 10 若 $f(z)$ 在 (x, y) 处共轭可导，则 $f(z)$ 在 (x, y) 处任意阶共轭可导，且 $f^{[n]}=\overline{\overline{f(z)}^{(n)}}$.

这是一个很重要的结论.

注 $f^{[n]}(z)$ 表示对 $f(z)$ n 阶共轭求导.

§4. 初等共轭解析函数

显然，多项式

$P(\overline{z})=a_n\overline{z}^n+a_{n-1}\overline{z}^{n-1}+\cdots+a_0$ $(a_n\neq 0)$ 及有理式函数

$$\frac{P(\overline{z})}{Q(\overline{z})}=\frac{a_n\overline{z}+a_{n-1}\overline{z}^{n-1}+\cdots+a_0}{b_m\overline{z}^m+b_{m-1}\overline{z}^{m-1}+\cdots+b_0}\quad\begin{pmatrix}a_n\neq 0\\ b_m\neq 0\end{pmatrix}$$

（除去使 $Q(\overline{z})=0$）是共轭解析的. 这一节将给出其它一些初等共轭解析函数，如指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数、双曲函数以及反双曲函数等等. 这些函数在复数域上应该取什么形式，它的周期性及有界性怎样等等.

1. 指数函数

对于任何复数 $z=x+iy$，指数函数 $e^{\overline{z}}\overset{\Delta}{=}e^{x}(\cos y-i\sin y)$.

对于指数函数 $e^{\overline{z}}$，我们指出它具有以下性质：

(1) $|e^{\overline{z}}|=e^{x}>0$, $\arg e^{\overline{z}}=-y$.

(2) 对于实数 $z=x(y=0)$ 来说，我们的定义与通常实指数的定义是一致的.

(3) 对于任意两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 及 $z_2=x_2+iy_2$,

有 $\overline{e^{z_1+z_2}}=\overline{e^{z_1}}\cdot\overline{e^{z_2}}$

(4) $\overline{e^z}$ 是以 $2\pi i$ 为周期的函数，即 $\overline{e^{z+2\pi i}}=\overline{e^z}$.

(5) $\overline{e^z}$ 在 z 平面上共轭解析，且 $(\overline{e^z})^0=\overline{e^z}$.

(6) $\lim\limits_{z\to\infty}\overline{e^z}$ 不存在

2. 对数函数

对数函数 $w=\overline{\mathrm{Ln}z}$ 是作为函数 $\overline{e^w}$ 的反函数而定义的。容易看出，对于任意一点 z，有无穷多个 w 的值与它相对应。事实上，设

$$z=|z|e^{i\mathrm{Arg}z}\ ,\qquad w=u+iv$$

比较 $z=\overline{e^w}$ 两端的模与幅角，则得到：

$$|z|=e^u,\qquad \mathrm{Arg}z=-v$$

$$w=\overline{\mathrm{Ln}z}=u+iv=\ln|z|-i\mathrm{Arg}z$$

$$=\ln|z|-i\arg z-2\pi ki\qquad (k\text{ 为任意整数})$$

其中， $0\leqslant\arg z<2\pi$

由此看出 $w=\overline{Lnz}$ 有无穷多个值，设

$$\overline{(\mathrm{Ln}z)}_k=\ln|z|-i\arg z-2k\pi i$$

(k 为任意固定的整数)

这些函数值之间的差为 $2\pi i$ 的整数倍。$\overline{(\mathrm{Ln}z)}_k$ 称为 $\overline{\mathrm{Ln}z}$ 的第 K 个分支，显然它在区域 $0<\arg z<2\pi$ 内连续，并且共轭可导，且有

$$\overline{(\mathrm{Ln}z)}_k{}^0=(\mathrm{Ln}|z|-i\arg z-2k\pi i)^0=\frac{1}{z}$$

即任何一个分支的共轭导数值都相当，且为 $\frac{1}{z}$.

对于对数的积和商有下列性质，设 $z_1 \neq 0$，$z_2 \neq 0$，则

(1) $\overline{\mathrm{Ln}(z_1 \cdot z_2)} = \overline{\mathrm{Ln} z_1} + \overline{\mathrm{Ln} z_2}$

(2) $\overline{\mathrm{Ln}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\mathrm{Ln} z_1} - \overline{\mathrm{Ln} z_2}$

3．幂函数

对任意的复数 α，当 $z \neq 0$ 时，定义 $\overline{z^\alpha} \overset{\Delta}{=} \overline{e^{\alpha \ln z}}$．

由于 $\mathrm{Ln} z$ 的多值性，所以一般说来，$\overline{z^\alpha}$ 是一个多值函数．当 $z=0$ 时，只有在 α 是正实数时，才规定 $\overline{z^\alpha}=0$．

幂函数有如下性质：

(1) 当 $\alpha = n$，n 是正整数时，$\overline{z^\alpha}$ 是单值函数，且 $\overline{z^\alpha} = \overline{z^n}$．

(2) 当 $\alpha = -n$，n 是正整数时，$\overline{z^\alpha} = \dfrac{1}{z^n}$．

(3) 当 $\alpha = \dfrac{1}{n}$，n 是正整数时，$\overline{z^\alpha} = \overline{z^{\frac{1}{n}}} = \dfrac{1}{\overline{\sqrt[n]{z}}}$

(4) 考虑 $\overline{z^\alpha}$ 的每一个单值分支，其中

$\theta_0 < \arg z < \theta_0 + 2\pi$（$\theta_0$ 为任意实数）．容易看出，它就在这个区域上连续并且共轭可导，且

$$\left(\overline{z^\alpha}\right)^0 = \overline{\alpha z^{\alpha-1}}$$

4．三角函数

对于任意的复数 z，规定

$$\overline{\sin z} \overset{\Delta}{=} \overline{\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)}$$

$$\overline{\cos z} \overset{\Delta}{=} \overline{\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)}$$

$$\overline{\mathrm{tg}z} \stackrel{\Delta}{=} \frac{\overline{\sin z}}{\overline{\cos z}}$$

这样定义的三角函数具有下列重要性质：

(1) 对于任何复数 z，有

$$\overline{\cos z} - i\,\overline{\sin z} = \overline{e^{iz}}$$

(2) $\overline{\cos z}$ 是偶函数，$\overline{\sin z}$ 是奇函数，即

$$\overline{\cos(-z)} = \overline{\cos z}\,,\quad \overline{\sin(-z)} = -\overline{\sin z}$$

(3) 对任何复数 z，有

$$\left(\overline{\sin z}\right)^2 + \left(\overline{\cos z}\right)^2 = 1$$

(4) $\overline{\sin z}$，$\overline{\cos z}$ 以2π 为周期，$\overline{\mathrm{tg}z}$ 以 π 为周期.

(5) 对任意复数 $z_1 = x_1 + iy$，$z_2 = x_2 + iy_2$，有

$$\overline{\cos(z_1+z_2)} = \overline{\cos z_1}\cdot\overline{\cos z_2} - \overline{\sin z_1}\cdot\overline{\sin z_2}$$

$$\overline{\sin(z_1+z_2)} = \overline{\sin z_1}\cdot\overline{\cos z_1} + \overline{\cos z_1}\cdot\overline{\sin z_2}$$

(6) $\left(\overline{\sin z}\right)^0 = \cos z$，$\left(\overline{\cos z}\right)^0 = -\sin z$，

$$\left(\mathrm{tg}z\right)^0 = \frac{1}{(\cos z)^2}$$

同样可以引入其它三角函数，如

$$\overline{\mathrm{ctg}\,z} = \frac{\overline{\cos z}}{\overline{\sin z}},\quad \overline{\sec z} = \frac{1}{\overline{\cos z}},\quad \overline{\csc z} = \frac{1}{\overline{\sin z}},$$

它们都在分母不等于零处共轭解析，且有

$$\left(\overline{\mathrm{ctg}z}\right)^0 = -\left(\overline{\csc z}\right)^2 \quad \left(\overline{\sec z}\right)^0 = \overline{\sec z}\cdot\overline{\mathrm{tg}z}$$

最后指出，在复数域中，不等式

$$\left|\overline{\sin z}\right| \leqslant 1,\qquad \left|\overline{\cos z}\right| \leqslant 1$$

不是到处成立的.

5. 反三角函数

首先考虑函数 $w=\overline{\cos z}$ 及 $w=\overline{\sin z}$ 的反函数 $z=\mathrm{Arc}\ \overline{\cos w}$ 及 $z=\mathrm{Arc}\ \overline{\sin w}$. 可以看出, $w=\overline{\cos z}$, $w=\overline{\sin z}$, 可以取到 w 平面上的任何一个值. 因此上述两个反函数在全平面上都有定义. 习惯上, 将 z 看作自变量, w 看作因变量, 故可改写为

$$w=\mathrm{Arc}\overline{\cos z},\quad w=\mathrm{Arc}\ \overline{\sin z}$$

依次称为反余弦函数、反正弦函数. 将这两个反三角函数用对数函数表示为

$$w=\mathrm{Arc}\ \overline{\cos z}=\frac{1}{i}\mathrm{Ln}\left(\overline{z+\sqrt{z^2-1}}\right)$$

$$w=\mathrm{Arc}\ \overline{\sin z}=\frac{1}{i}\mathrm{Ln}\left(\overline{\sqrt{1-z^2}-iz}\right)$$

它们都是多值函数, 并对平面上的任何复数值 z 都是有定义的.

对于函数 $w=\mathrm{Arc}\,\overline{\mathrm{tg} z}$, 则 $z=\overline{\mathrm{tg} w}$. 同样, 将它用对数函数表示为

$$w=\mathrm{Arc}\ \overline{\mathrm{tg} z}=\frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\overline{\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)}$$

这也是一个多值函数, 但在 $z=\pm i$ 无定义.

这三个反三角函数在相应地取了单值分支后, 通过共轭解析函数同解析的关系易得

$$\left(\mathrm{Arc}\,\overline{\cos z}\right)^{0}=i\overline{\left(\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{z+z\sqrt{z^2-1}-1}\right)}$$

$$\left(\mathrm{Arc}\,\overline{\sin z}\right)^{0}=\overline{\left(\frac{\sqrt{1-z^2}-iz}{1-z^2-iz\sqrt{1-z^2}}\right)}$$

$$\left(\overline{\text{Arc tg} z}\right)^{0}=\frac{1}{1+z^{2}}$$

6. 双曲函数与反双曲函数

双曲正弦函数及双曲余弦函数分别定义为

$$\overline{shz}\stackrel{\Delta}{=}\overline{\left(\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}\right)},\quad chz\stackrel{\Delta}{=}\overline{\left(\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}\right)}$$

显然，它们都是全平面上的共轭解析函数，且具有以下性质：

(1) $\overline{shz}=\overline{i\sin(iz)}$，$\overline{chz}=\overline{\cos(iz)}$

(2) $\left(\overline{chz}\right)^{2}-\left(\overline{shz}\right)^{2}=1$

(3) $\left(\overline{shz}\right)^{0}=\overline{chz}$，$\left(\overline{chz}\right)^{0}=\overline{shz}$

它们的反函数：

$$w=\text{Arc}\,\overline{shz}=-\overline{\text{Ln}(\sqrt{1-z^{2}}-iz)}$$

$$w=\text{Arc}\,\overline{chz}=-\overline{\text{Ln}\,(z+\sqrt{z^{2}-1})}$$

第二章　共轭解析函数的积分理论

§1. 复变函数的共轭积分

1. 共轭积分概念

我们用类似复变函数的积分定义复变函数的共轭积分.

定义 1　设 c 是复平面上的一条逐段光滑曲线：$z=z(t)=x(t)+iy(t)$，$(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$，且规定了方向，起点为 $z_0=z(\alpha)$，终点为 $z'=z(\beta)$. 又设复变函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在曲线 c 上连续. 现在将区间 $[\alpha,\beta]$ 作任意分割：

$$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=\beta$$

这样，在曲线 c 上就对应着点：

$$z_0=z(\alpha),\ z_1=z(t_1)\cdots z_{n-1}=z(t_{n-1}),$$

$z_n=z'=z(\beta)$

它们在曲线 c 上依次地由起点 $z_0=z(\alpha)$ 到终点 $z_1=z(\beta)$，且把曲线 c 分成 n 段. 在曲线 c 的每一段 z_kz_{k+1} 上，考虑积分乘积 $f(z_k')\overline{\Delta z_k}$，其中 z_k' 是以 z_k 及 z_{k+1} 为两个端点的一小段弧上任取的一个点，$\overline{\Delta z_k}=\overline{z_{k+1}-z_k}$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$ 作和：

$$\sum_{k=0}^{n-1}f(z_k')\overline{\Delta z_k}\tag{1}$$

且令

$$d=\max\widehat{z_kz_{k+1}}\tag{2}$$

其中 $\widehat{z_kz_{k+1}}$ 为这一小段弧的弧长. 研究极限

$$\lim_{d\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(z'_k)\overline{\Delta z_k}$$

若不管在 C 上如何取分点 z_k，也不管在弧$\widehat{z_k\ z_{k-1}}$上如何取z'_k $(k=0,1,\ \cdots,\ n-1)$，这个极限总是存在的话，则称这个极限值为复变函数 $f(z)$在有定向的曲线C上的共轭积分，

记作

$$\lim_{d\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(z'_k)\overline{\Delta z_k}=\int_C f(z)\ \overline{dz} \qquad (3)$$

下面讨论积分的存在性．对于(1)分别写出其实部及虚部后得到

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(z'_k)\ \overline{\Delta z_k}=\sum_{k=0}^{n-1}[u(x'_k,\ y'_k)+iv(x'_k,\ y'_k)]$$

$$[\Delta x_k-i\Delta y_k]$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}[u(x'_k,\ y'_k)\Delta x_k+v(x'_k,\ y'_k)\Delta y_k] \qquad (4)$$

$$+i[v(x'_k,\ y'_k)\Delta x_k-u(x'_k,\ y'_k)\Delta y_k]$$

其中，$z'_k=x'_k+iy'_k$，$\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$，$\Delta y_k=y_{k+1}-y_k$

$$z_k=x_k+iy_k,\quad (k=0,1,\ \cdots,\ n-_1)$$

因为 $f(z)$在 C 上是连续的，所以二元函数 $u(x,y)$及$v(x,y)$在 C 上也是连续的，而 C 又是一条逐段光滑曲线，且当 $d\to 0$ 时，

$$d_1=\max_{0\leqslant k\leqslant n-1}\left|x_{k+1}-x_k\right|\to 0$$

$$d_2=\max_{0\leqslant k\leqslant n-1}\left|y_{k+1}-y_k\right|\to 0$$

因此，由数字分析中的线积分存在定理知道：积分$\int_C f(z)\overline{dz}$必存在，且由(4)式得到：

$$\int_C f(z)\overline{dz}=\int_C u(x,\ y)dx+v(x,\ y)dy$$
$$+i\int_C v(x,\ y)dx-u(x,\ y)dy \qquad (5)$$

公式(5)提供了一种计算复变函数共轭积分的方法，它可以化为线积分来进行计算．公式(5)可以在形式上看作函数 $f(z)=u+iv$ 与微分 $\overline{dz}=dx-idy$ 相乘后所得到

$$\int_C f(z)\ \overline{dz}=\int_C (u+iv)(dx-idy)$$
$$=\int_C udx+vdy+i\int_C vdx-udy$$

例1　求 $\int_C \overline{dz}$，其中 C 是连结起点 z_0 及终点 z' 的任意一条逐段光滑的曲线．

解．沿着曲线 C，任取分点 z_0，$z_1\cdots z_n=z'$，按公式(1)作和，其中 $f(z)\equiv 1$，得到：

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(z_k')\ \overline{\Delta z_k}=\sum_{k=0}^{n-1}\overline{\Delta z_k}=\overline{z_1-z_0}+\overline{z_2-z_1}+\cdots$$
$$+\overline{z'-z_{n-1}}=\overline{z'-z_0}$$

这说明，这个积分不依赖于曲线 C 的形状，而只依赖于起点与终点。

例2　求 $\int_C R_e z\overline{dz}$．其中：(1)　C 为原点(0, 0)到点（2、0）的线段及从（2, 0）到点（2, 1）的直线段；(2) C 为从原点（0, 0）到点（2, 1）的直线段．

解

(1)　$\int_C R_e z\,\overline{dz}=\int_0^2 xdx-i\int_0^1 2dy=2(1-i)$

(2)　$\int_C Re z\,\overline{dz}=\int_0^2 xdx-i\int_0^1 2ydy=2-i$

由此看出，由于(1)式与(2)式的积分路径不同，尽管起点与终点一样，但是积分值还是不同.

例 3 计算$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{dz}}{\overline{(z-z_0)}^n}$，其中$n$为自然数，而$C$是以$z_0$为中心，半径为$r$的圆周$|z-z_0|=r$，且规定$C$的方向是逆时针方向.

解 由曲线C的参数方程为$z-z_0=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，因此

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{dz}}{\overline{(z-z_0)}^n}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{-rie^{-i\theta}}{r^n e^{-in\theta}}$$

$$=\begin{cases}-1 & n=1\\ 0 & n\neq 1\end{cases}$$

2. 共轭积分的基本性质

复变函数共轭积分也有类似数学分析中的积分性质，在此有：

定理 1 设C是复平面上逐段光滑曲线，而函数$f(z)$在C上连续，则

(1) $\int_C af(z)\overline{dz}=a\int_C f(z)\overline{dz}$，其中$a$为常数.

(2) $\int_C[f_1(z)+f_2(z)]dz=\int_C f_1(z)\overline{dz}+\int f_2(z)\overline{dz}$

其中$f_1(z)$，$f_2(z)$也都在C连续.

(3) $\int_C f(z)\overline{dz}=\int_{C_1}f(z)\overline{dz}+\int_{C_2}f(z)\overline{dz}$

其中C是曲线C_1和C_2所组成的.

(4) $\int_C f(z)\overline{dz}=-\int_{C^-}f(z)\overline{dz}$

其中 C^- 是与曲线 C 方向相反的同一条曲线.

（5） 若在曲线 C 上，$|f(z)|\leqslant M$，M 为一常数。而 L 为曲线 C 的弧长，则

$$\left|\int_C f(z)\,\overline{dz}\right|\leqslant\int_C|f(z)|\,ds\leqslant ML$$

证 由于复变函数共轭积分在本质上就是线积分，在数学分析中，线积分是具有上述前四条性质的，所以在复变函数共轭积分中，上述前四个性质也成立.

下面证明性质（5）. 在曲线上任取分点，$z_0, z_1, \cdots, z_n$ 以及 C 上从 z_k 到 z_{k+1} 一段弧上的任意点 z'_k $(k=0,1,\cdots n-1)$，则

$$|s|=\left|\sum_{k=0}^{n-1}f(z'_k)\overline{\Delta z_k}\right|\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}|f(z'_k)||\Delta z_k|$$

$$\leqslant M\sum_{k=0}^{n-1}|z_{k+1}-z_k|\leqslant ML$$

两边取极限

$$\lim_{d\to 0}|s|\leqslant\int_C f(z)ds\leqslant ML$$

由于 $$\lim_{d\to 0}s=\int_C f(z)\overline{dz}$$

且 $$\lim_{d\to 0}|s|=\left|\lim_{d\to 0}s\right|$$

比较后面三个式子，于是性质（5）得证.

§2. 共轭解析函数的积分定理

从上节例子中已经看到，共轭积分有的与积分路径有关，有的无关. 共轭解析函数的共轭积分到底与路径有关吗？下面的定理回答了这个问题.

定理 1 （积分定理）设函数 $f(z)$ 是区域 D 内的共轭解析

函数，则对于 D 内任何一条闭曲线 C，只要曲线 C 以及它的内部都属于区域 D，就有

$$\int_C f(z)\,\overline{dz}=0$$

证 因为函数 $f(z)$ 在域 D 内共轭解析，由共轭解析函数与解析函数的关系知道，$\overline{f(z)}$ 在 D 域内解析，于是

$$\int_C f(z)\,\overline{dz}=\int_C udx+vdy+i\int_C vdx-udy$$

$$=\int_C \overline{f(z)}\,dz=0\ (\text{柯西定理})$$

与定理 1 等价的，我们有：

定理 2 设 D 是复平面上单连通区域，函数 $f(z)$ 在区域 D 内共轭解析，则积分与路径无关，即对任何两点 $z_0\in D$、$z'\in D$ 积分：

$$\int_{z_0}^{z'} f(z)\,\overline{dz}$$

不依赖于连接起点 z_0 与终点 z' 的任意曲线.

在很多理论及实际问题中，往往考虑 D 是单连通区域，D 的边界 C 是逐段光滑闭曲线，而函数 $f(z)$ 在 D 内共轭解析，在闭区域 $\overline{D}=D+C$ 上连续. 对于这样的区域及函数，积分定理有如下推广：

定理 3 设 D 是由逐段光滑曲线 C 所围的内部区域，函数 $f(z)$ 在 D 内共轭解析，在 $\overline{D}=D+C$ 上连续，则

$$\int_C f(z)\,\overline{dz}=0$$

证 由于 $f(z)$ 在 D 内共轭解析，在 $\overline{D}=D+C$ 上连续，所以 $\overline{f(z)}$ 在 D 内解析，在 $\overline{D}=D+C$ 上连续，由柯西定理的推广：

$$\int_C \overline{f(z)} = 0$$

而 $\int_C f(z)\,\overline{dz} = \overline{\int_C f(z)\,dz}$ （定理1的证明），

所以也有

$$\int_C f(z)\,\overline{dz} = 0$$

积分定理的另一推广形式是 D 为复连通区域的情况：设区域 D 的边界 C 由一些互不相交的逐段光滑曲线 C_i ($1\leqslant i\leqslant n$) 所组成，其中 C_1 包含所有其它 C_i ($2\leqslant i\leqslant n$) 在其内部 $C=C_1+C_2+\cdots+C_n$，我们规定曲线 C 的方向：当人沿着 C 走动时，区域 D 永远保持在他的左面，即在 C_1 上按逆时针方向绕行，而在其它 C_i ($2\leqslant i\leqslant n$) 上按顺时针方向绕行．在这种情形有：

定理 4 设 D 是由 $C=C_1+C_2+\cdots+C_n$ 所围成的有 n 个“洞”的复连通区域，其中逐段光滑的曲线 C_1 包含所有其它 C_i ($2\leqslant i\leqslant n$) 在其内部，函数 $f(z)$ 在 D 内共轭解析，在 $\overline{D}=D+C$ 上连续，则

$$\int_C f(z)\,\overline{dz} = 0$$

证 作一些辅助曲线，把区域 D 分成 n 个区域 D_k ($k=1$、2，$\cdots n$)，其中每一个区域 D_k 的边界 L_k ($k=1$、2，$\cdots$) 也都是逐段光滑闭曲线．根据定理3，当沿区域 D_k 的边界 L_k 的正方向求积分时，得

$$\int_{L_k} f(z)\,\overline{dz} = 0 \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots n)$$

因而

$$\int_C f(z)\,\overline{dz} = \int_{L_1} f(z)\,\overline{dz} + \int_{L_2} f(z)\,\overline{dz} + \cdots$$

$$+\int_{L_n} f(z)\,\overline{dz}=0$$

例 4 求证 $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{dz}}{\overline{(z-z_0)^n}}=\begin{cases}1 & \text{当 } n=1\text{时}\\ 0 & \text{当 } n\neq 1\text{时}\end{cases}$

其中 z_0 是任何一点，C 是包含 z_0 在内的任意闭曲线，其方向为逆时针方向，n 为整数.

证 我们以 z_0 为中心，半径为 r 作一个小圆 C_r：$|z-z_0|=r$，使得 C_r 全部位于 C 所含的区域内. 显然，函数 $\frac{1}{\overline{(z-z_0)^n}}$ 就在以 C 及 C_r 为边界的两连通区域上共轭解析，因此，根据定理 4

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{dz}}{\overline{(z-z_0)^n}}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} \frac{\overline{dz}}{\overline{(z-z_0)^n}}$$

由本章例 3 结果得证.

例 5 求 $\int_{x^2+y^2=2x} \overline{\cos z}\ \overline{dz}$

解 由于 $\overline{\cos z}$ 在全平面上共轭解析，因而它在 $x^2+y^2=2x$ 以及它所围的区域上共轭解析，应用积分定理

$$\int_{x^2+y^2=2x} \overline{\cos z}\ \overline{dz}=0$$

以上两个例子说明：利用积分定理及一些简单函数的积分，就可以对较为复杂函数计算出积分值.

§3. 原函数与不定积分

设 D 是单连通区域，而函数 $f(z)$ 是 D 内的共轭解析函数，则由定理 2 知道，对于 D 内任何一条逐段光滑曲线 AB，积分值 $\int_{AB} f(z)\,\overline{dz}$ 不依赖于曲线 AB 的位置，而

只依赖于曲线 AB 的起点 z_0 及终点 z. 这样，当 z_0 固定时，这个积分就在 D 内定义了一个终点为 z 的单值函数，将这个单值函数记作

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\,\overline{dz}$$

现在证明：由上述积分所确定的函数 $F(z)$ 在 D 内共轭解析，且

$$F^0(z)=f(z)$$

设 z 是区域 D 内任一点，以 z 为中心作小圆 K，可以认为 $K\subset D$，任取 K 内一点 z'，则

$$F(z')=\int_{z_0}^{z'} f(z)\,\overline{dz}$$

由于积分与路径是无关的，因此可以认为由 z 到 z' 是用直线段连接起来的，考虑

$$\frac{F(z')-F(z)}{z'-z}=\frac{1}{z'-z}\int_{z}^{z'} f(\zeta)\overline{d\zeta}$$

则

$$\frac{F(z')-F(z)}{z'-z}-f(z)=\frac{1}{z'-z}\int_{z}^{z'} f(\zeta)\overline{d\zeta}-f(z)$$

$$=\frac{1}{z'-z}\left(\int_{z}^{z'}(f(\zeta)-f(z))\overline{d\zeta}\right) \qquad (6)$$

其中积分是沿着连接 z 到 z' 的直线进行的．由于函数 $f(z)$ 在 D 内共轭解析，因此它是连续的．即任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $|\zeta-z|<\delta$ 时 $(\zeta\in K)$ 有

$$|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$$

这样，当 $|z'-z|<\delta$ 时，由等式(6)就得到

$$\left|\frac{F(z')-F(z)}{z'-z}-f(z)\right|\leqslant\frac{1}{|z'-z|}\int_{z}^{z'}|f(\zeta)-$$

$$-f(z)|ds \leqslant \frac{1}{|z'-z|} \cdot \varepsilon \cdot |z'-z| = \varepsilon$$

于是

$$\lim_{z' \to z} \frac{F(z')-F(z)}{\overline{z'-z}} = f(z)$$

即 $\qquad F^0(z)=f(z)$

仔细分析证明过程，我们发现，在整个证明中，只用到两个事实：

(1) 函数 $f(z)$ 在区域 D 内连续；

(2) 函数 $f(z)$ 在区域 D 内沿着任意一条闭曲线上的积分值为零，即积分与路径无关．至于对于区域，不必要求它一定是单连通区域，复通区域也可以．

因此，可以把上面证得的结果归结为下面的定理：

定理 5 设 D 是复平面上的区域，函数 $f(z)$ 在区域 D 内连续，若函数 $f(z)$ 沿着任意一条在区域 D 内的曲线上的积分为零，则由变上限的积分所定义的函数

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\,\overline{dz}$$

是一个区域 D 内的单值共轭解析函数，且

$$F^0(z)=f(z)$$

这个定理与数学分析的结果是类似的．在数学分析中，有了这个结果后，就得到了基本定理(牛顿-莱布尼兹公式)．这里也有类似结果，与此有关的，有下述定义：

定义 2 设 D 是复平面上的区域，而函数 $f(z)$ 是区域 D 内的连续函数，满足条件

$$\Phi^0(z)=f(z) \qquad (z \in D)$$

的函数 $\Phi(z)$ 称为函数 $f(z)$ 的原函数．所有原函数的集

合称为函数 $f(z)$ 的不定积分.

定理 6 设 D 是复平面上的区域，函数 $f(z)$ 在 D 连续，且在 D 内任何一条闭曲线上积分时，其积分值为零，则函数 $f(z)$ 的不定积分有下列一般表示式：

$$\Phi(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\,\overline{dz}+C \qquad (z_0\in D) \qquad (7)$$

其中 C 为任意常数，且若 $\psi(z)$ 是 $f(z)$ 的任意一个原数函数，则有

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,\overline{dz}=\psi(z)-\psi(z_0) \qquad (8)$$

证 由定理 1 知，函数 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\overline{d\zeta}$ 是 D 内的单值共轭解析函数，且 $F^0(z)=f(z)$，而且由于 $\Phi(z)$ 是函数 $f(z)$ 的原函数，即 $\Phi^0(z)=f(z)$. 由此可以得到

$$(\Phi(z)-F(z))^0=0$$

由推论"若 $f^0(z)\equiv 0$, $z\in D$, 则 $f(z)\equiv$ 常数"

得到 $\quad \Phi(z)-F(z)=C$

其中 C 为常数. 这就证明了公式(7).

同理，由于 $\psi(z)$ 是原函数，因此由(7)式得到：

$$\psi(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\overline{d\zeta}+C$$

两边令 $z=z_0$,

$$C=\psi(z_0)$$

于是公式(8)得证.

这个定理与数学分析中的基本定理完全类似.

例 6 求 $\int_a^b \overline{z^3}\,\overline{dz}$

解. 由于函数$\overline{z}^3$在全平面共轭解析，因此根据积分定理，它沿任何一条闭曲线的积分为零，所以积分值 $\int_b^a \overline{z}^3 \overline{dz}$ 是确定的数.

显然，函数$\dfrac{\overline{z}^4}{4}$是函数$\overline{z}^3$的一个原函数，因此利用公式(8)

$$\int_b^a \overline{z}^3 \overline{dz} = \frac{1}{4}(\overline{b}^4 - \overline{a}^4)$$

积分定理还有一个逆定理，即

定理 7 设 D 是复平面内单连通区域，函数 $f(z)$在 D 上连续，若在 D 内任意一条闭曲线 C 上都有

$$\int_C f(z)\overline{dz} = 0$$

则函数 $f(z)$是 D 内的共轭解析函数.

证 在定理的条件下，根据定理 5 有

$$F(z) = \int_{Z_0}^{Z} f(\zeta)\overline{d\zeta}$$

是区域 D 内的共轭解析函数，且 $F^0(z) = f(z)$. 由第一章定理10，$f(z)$也是 D 内的共轭解析函数.

于是，由积分定理及它的逆定理，我们得到一个函数 $f(z)$ 在域 D 内共轭解析的充分必要条件：

定理 8 设D是复平面内的单连通区域，函数 $f(z)$在 D 内共轭解析的充分必要条件是对于 D 内任意一条闭曲线 C 都有$\int_C f(z)\ \overline{dz} = 0$.

§4．共轭解析函数的积分公式

和解析函数一样，共轭解析函数在区域边界上的值也能确定区域内的值，准确地说有：

定理 9 （积分公式）设复平面内区域 D 的边界 C 是由 n 条不相交的逐段光滑曲线 C_i（$1 \leqslant i \leqslant n$）所组成的，其中 C_1 包含其它的 C_i（$2 \leqslant i \leqslant n$）的内部，且规定 C 的方向为正方向．设函数 $f(z)$ 在区域 D 内共轭解析，在闭区域 $\overline{D} = D + C$ 上连续，则在区域 D 内有

$$f(z) = = \frac{-1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\overline{\zeta - z}}\overline{d\zeta} \qquad (9)$$

这个公式是共轭解析函数的一个基本公式，它表示函数 $f(z)$ 在边界上的值完全决定了它在区域 D 内任一点的值．

证 由于 $f(z)$ 在区域 D 内是共轭解析的，在闭区域 $\overline{D} = D + C$ 上连续，所以由共轭解析与解析的关系知道，$\overline{f(z)}$ 在区域内是解析的，在闭区域 $\overline{D} = D + C$ 上是连续的，对 $\overline{f(z)}$ 使用柯西公式：

$$\overline{f(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{f(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta$$

两边取共轭

$$f(z) = \frac{-1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\overline{\zeta - z}}\overline{d\zeta}$$

推论 设函数 $f(z)$ 在区域 $|z - z_0| < R$ 内共轭解析，在闭区域 $|z - z_0| \leqslant R$ 上连续，则有

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})d\theta \quad (0 < r \leqslant R)$$

这个公式表明共轭解析函数在任意一个圆周$|z-z_0|=r$上的积分平均值为于它在圆心的值.

例7 求 $$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=8}\frac{\overline{\sin\zeta}}{\overline{\zeta}}\overline{d\zeta}$$

解 由定理1，取$f(\zeta)=\overline{\sin\zeta}$，$z=0$.

于是 $$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=8}\frac{\overline{\sin\zeta}}{\overline{\zeta}}\overline{d\zeta}=-\overline{\sin 0}=0\,.$$

对于包含无穷远点的区域，我们有推广的积分公式：

定理10. 设D_1是复平面上包含无穷远点的区域，其边界为$C=C_1+C_2+\cdots+C_n$，且规定在C上绕行时，区域D_1永远保持在左方. 设函数$f(z)$在区域D_1内除了无穷远点外共轭解析，并在闭区域$\overline{D}=D_1+C$上连续，且，$\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=f(\infty)$，则在区域$D_1$内，函数$f(z)$有下列表示式：

$$f(z)=\frac{-1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\overline{\zeta-z}}\overline{d\zeta}+f(\infty)\qquad(10)$$

证 因$f(z)$在D_1内共轭解析，在$\overline{D}=D+C$上连续，所以$\overline{f(z)}$在D_1内解析，在$\overline{D}=D+C$上连续. 由推广的柯西公式：

$$\overline{f(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\overline{f(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta+\overline{f(\infty)}$$

两边取共轭

$$f(z)=\frac{-1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\overline{\zeta-z}}\overline{d\zeta}+f(\infty)$$

于是定理得证.

例8 求 $$I=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=99}\frac{\overline{dz}}{\overline{(z-2)(z-4)\cdots(z-98)(z-100)}}$$

解 由于函数 $f(z)=\dfrac{1}{\prod\limits_{k=1}^{49}\overline{(z-2k)}}$

在区域$|z|\geqslant 99$上除了$z=\infty$外共轭解析，且

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=0$$

应用定理10

$$f(100)=f(\infty)-I$$

所以 $\qquad I=f(\infty)-f(100)$

$$=-\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{49}\overline{(100-2k)}}=-\frac{1}{98!!}$$

利用解析函数高阶导数的表达式，我们容易得到共轭解析函数的相应阶共轭导数的表达式．它们是

定理11 设区域D的边界为$C=C_1+C_2+\cdots+C_n$，它满足定理9的规定．设函数$f(z)$在区域D内共轭解析，在闭区域$\overline{D}=D+C$上连续，则函数$f(z)$在区域D内有各阶共轭导数，且在D内有

$$f^{[n]}(z)=\frac{-n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\overline{(\zeta-z)}^{n+1}}\overline{d\zeta} \quad (z\in D) \tag{11}$$

类似解析函数，共轭解析函数有积分不等式：

定理12 设函数$f(z)$在圆$|z-z_0|<R$内共轭解析，且$|f(z)|\leqslant M$，则$\left|f^{[n]}(z_0)\right|\leqslant\dfrac{Mn!}{R^n}$ $\quad (n=1, 2\cdots)$

也不难证明：

定理13 设函数$f(z)$在全平面上共轭解析，且有界$|f(z)|\leqslant M$，则$f(z)\equiv$常数．

第三章　共轭解析函数的级数理论

由于共轭解析函数的性质都可以从解析函数相应性质得到，为了避免重复，除个别地方以外，均不证明，只给结论．

§1．共轭解析函数项级数

定理 1　设函数序列$\{f_n(z)\}$中的每一项在区域D内共轭解析，且由它们所构成的级数在D内一致收敛于函数$f(z)$，即

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)=f(z)$$

则有：

1)　函数$f(z)$在D内共轭解析；

2)　函数$f(z)$在D内的各阶共轭导数．

$$f^{[p]}(z)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k^{[p]}(z) \qquad (p=1,\ 2\cdots)$$

且在D内闭集上一致收敛．

定理 2　设D是复平面上的区域，∂D是它的边界，函数$f_n(z)$　$(n=1,\ 2\cdots)$在D内共轭解析，在$\overline{D}=D+\partial D$上连续，且级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_n(z)$在区域$D$的边界$\partial D$上一致收敛，则它必在闭区域$\overline{D}=D+\partial D$上也一致收敛．

§2．共轭幂级数

定义 1　形如$\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n\overline{(z-a)^n}=C_0+C_1\overline{(z-a)}+$

$C_2\overline{(z-a)}^2+\cdots$的级数称为共轭幂级数，其中$C_0, C_1, C_2\cdots$和$a$都是复常数．若作变换$\zeta=z-a$，则以上般数还可以写成如下形式：

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \bar{z}^n = C_0 + C_1\bar{z} + C_2\bar{z}^2 + \cdots \quad (1)$$

因此，我们只考虑这个形式的级数，而并不失去一般性．共轭幂级数是最简单的共轭解析函数项级数，下面我们讨论它的敛散性．

定理 1 若共轭幂级数(1)在某点$z_0(\neq 0)$收敛，则它在以0为心并通过z_0的圆周内部绝对收敛，并且在任何一个较小的闭圆$|z|\leqslant\rho(\rho\leqslant|z_0|)$上一致收敛．

推论 若共轭幂级数(1)在某点$z_1(\neq 0)$发散，则它在以0为心并通过z_1的圆周C外部发散．

对于形如(1)的幂级数，$z=0$这一点总是收敛的．$z\neq 0$时，可能有下述三种情况：

1) 任意的$z\neq 0$，级数$\sum_{n=0}^{\infty} C_n\bar{z}^n$均发散．

2) 任意的z，级数$\sum_{n=0}^{\infty} C_n\bar{z}^n$均收敛．

3) 存在一点$z_0\neq 0$，使$\sum_{n=0}^{\infty} C_n\bar{z}_0^n$收敛，于是$\sum_{n=0}^{\infty} C_n\bar{z}^n$在圆周$|z|=|z_0|$内部绝对收敛；另外又存在一点$z_1$，使$\sum_{n=0}^{\infty} C_n\bar{z}_1^n$发散，则$\sum_{n=0}^{\infty} C_n\bar{z}^n$在圆周$|z|=|z_1|$的外部发散．

在这种情况下，可以证明，存在一个正数，使得$\sum_{n=0}^{\infty} C_n\bar{z}^n$在圆周$|z|=R$内部绝对收敛，在圆周$|z|=R$的外部发散．$R$称为共轭幂级数的收敛半径，圆$|z|<R$和圆周$|z|=R$分

别称为它的收敛圆和收敛圆周. 1) 情形约定 $R=0$; 2) 情形约定 $R=+\infty$, 也称它们为收敛半径.

对级数 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n \overline{(z-a)^n}$ 可能仅在 a 处收敛 ($R=0$) 或在 z 平面上处处收敛 ($R=+\infty$), 或在圆周 $|z-a|=R$ ($0<R<+\infty$) 内部收敛, 而在其外发散.

对于共轭幂级数的收敛半径, 我们有:

定理 2 设 $l=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|C_n|}$, 则共轭幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n \overline{(z-z_0)^n}$ 的收敛半径:

$$R=\frac{1}{l}$$

(当 $l=0$ 时, 我们令 $R=+\infty$, 当 $l=+\infty$ 时, 我们令 $R=0$).

定理 3 共轭幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n \overline{(z-a)^n}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|}$ 存在, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|=\frac{1}{R}$,

即 $$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|$$

例 1 试求下列各共轭幂级数的收敛半径 R.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\overline{z}^n}{n^2}$

解 $$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{n^2}\right|=1$$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\overline{z}^n}{n!}$

解 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{C_{n+1}}{C_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{(n+1)!}}{\dfrac{1}{n!}}=0$

$$R=\frac{1}{l}=+\infty$$

（3）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!\bar{z}^n$

解 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{C_{n+1}}{C_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!}{n!}=+\infty$

$$R=\frac{1}{l}=0$$

关于共轭幂级数和的共轭解析性有：

定理 4 (1)共轭幂级数 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n\overline{(z-a)}^n$ 的和函数在其收敛圆K：$|z-a|<R(0<R\leqslant+\infty)$ 内共轭解析；

2）在K内，共轭幂级数可以逐项共轭求导任意阶，即

$$f^{[p]}(z)=p!C_p+(p+1)p\cdots 2C_{p+1}\ \overline{(z-a)}+\cdots+$$
$$+n(n-1)\cdots(n-p+1)C_n\overline{(z-a)}^{n-p}+\cdots$$

（3） $C_p=\dfrac{f^{[p]}(a)}{p!}(p=0,\ 1,\ 2\cdots)$

§3. 共轭解析函数的共轭幂级数展式

定理 5 设 $f(z)$在区域 D内共轭解析，$a\in D$，只要圆K：$|z-a|<R$含于 D, 则 $f(z)$在K内能展成共轭幂级数：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\overline{(z-a)}^n \qquad (2)$$

其中系数 $C_n=\dfrac{f^{[n]}(a)}{n!}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

且展式是唯一的.

公式(2)称为$f(z)$在a点的共轭幂级数展式，综合定理4、定理5，我们得到共轭解析函数又一等价概念.

定理 6 $f(z)$在区域D内共轭解析的充分必要条件是$f(z)$在D内任一点a的邻域内可展成$\overline{z-a}$的幂级数.

对共轭幂级数的和函数在其收敛圆周上的状况，我们有：

定理 7 若共轭幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} C_n\overline{(z-a)}^n$的收敛半径$R>0$，且$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(\overline{z-a})^n$，$(z\in K: |z-a|<R)$，则$f(z)$在收敛圆周$C$：$|z-a|=R$上至少有一奇点，即不可能有这样的函数$f(z)$存在，它在$|z-a|<R$内与$f(z)$恒等，而在$C$上处处共轭解析.

推论 若函数$f(z)$在a点共轭解析，则$f(z)$在a点邻域内可以展成$\overline{z-a}$的幂级数，且其收敛圆周必以a为圆心，并通过$f(z)$的距a最近的一个奇点.

下面给出一些初等共轭解析函数的共轭幂级数展式.

例 2 $f(z)=\overline{e^z}$在z平面上共轭解析，它在$z=0$处的共轭幂级数展式为

$$\overline{e^z}=1+\bar{z}+\frac{\bar{z}^2}{2!}+\cdots+\frac{\bar{z}^n}{n!}+\cdots(|z|<+\infty) \quad (3)$$

例 3 利用$\overline{e^z}$的展式求得

$$\overline{\cos z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\bar{z}^{2n}}{(2n)!} \quad (|z|<+\infty) \quad (4)$$

同样可得

$$\overline{\sin z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\bar{z}^{2n+1}}{(2n+1)!}(z|<+\infty) \quad (5)$$

例 4　多值函数 $\overline{L_n(1+z)}$ 的各支展式：

$$\overline{Ln_k(1+z)}=-2k\pi i+\bar{z}-\frac{\bar{z}^2}{2}+\frac{\bar{z}^3}{3}\cdots+$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{\bar{z}^n}{n}+\cdots(|z|<1) \qquad (6)$$

其中　　$k=0$，±1，±2，…

例5．$\overline{(1+z)^\alpha}$ 的一个单值共轭解析分支展式为

$$\overline{(1+z)^\alpha}=1+\bar{\alpha}\bar{z}+\overline{\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}}\bar{z}^2+\cdots+$$

$$+\overline{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n-1)}{n!}}\bar{z}^n+\cdots(|z|<1) \qquad (7)$$

§4. 共轭解析函数的零点及唯一性定理

类似解析函数的零点，我们定义共轭解析函数的零点如下．

定义 2　设 $f(z)$ 在共轭解析区域 D 的一点 a 取值为零，则称 a 为共轭解析函数 $f(z)$ 的零点．

若在 $|z-a|<R$ 内，共轭解析函数 $f(z)\neq0$，我们将 $f(z)$ 在 a 点展成共轭幂级数，此时，共轭幂级数的系数不会全为零，故必存在一正整数 $m(m\geq1)$，使得，

$$f(a)=f^0(a)=\cdots=f^{[m-1]}(a)=0,\ \text{但}\ f^{[m]}(a)\neq0,$$

合乎上述条件的 m 称为零点的级，a 称为 $f(z)$ 的 m 级零点．

设不恒为零的共轭解析函数 $f(z)$ 以 a 为 m 级零点，则

$$f(z)=\overline{(z-a)^m}\psi(z)$$

其中 $\psi(z)$ 在 a 的邻域 $|z-a|<R$ 内共轭解析，且 $\psi(a)\neq0$．

对于共轭解析函数的零点，我们还有：

定理 8 若在$|z-a|<R$内共轭解析的函数$f(z)$不恒为零，a为其零点，则必有a的一个邻域，使得其中仅有a为$f(z)$的零点.

推论 设$f(z)$在$|z-a|<R$内共轭解析，若有$f(z)$的一列零点$\{z_n\}$收敛于a（但$z_n \neq a$），则$f(z)$在$|z-a|<R$内必恒为零.

类似解析函数的唯一性定理的讨论，共轭解析函数有：

定理 9 （唯一性定理）在区域D内两个共轭解析函数$f_1(z)$和$f_2(z)$，若它们在一个收敛于$a \in D$的点列$\{z_n\}$（但$z_n \neq a$）上等值，则$f_1(z)$和$f_2(z)$在D内恒等.

推论 （1）在区域D内共轭解析的函数$f_1(z)$及$f_2(z)$在D内的某一子区域（或一小段弧）上相等，则它们在区域D内恒等；（2）一切在实轴上（或仅在实轴的一段上）成立的恒等式，在z平面上也成立，只要这个恒等式的两边在z平面上都是共轭解析的.

从上面的讨论，我们自然会问共轭解析函数是否也具备最大模原理，回答是肯定的.

定理10 设$f(z)$是区域D内不恒为常数的共轭解析函数，则$|f(z)|$的最大值不可能在D内任何点达到.

推论 （1）$f(z)$在有界区域D内共轭解析，在闭域$\overline{D}$上连续；2）$|f(z)|\leqslant M$，$(z \in \overline{D})$，则除$f(z)$为常数外，$|f(z)|<M$ $(z \in D)$.

第四章　共轭解析函数的双边共轭幂级数展式与弧立点

在第三章，我们已经看到，用共轭幂级数来表示圆形区域内的共轭解析函数是很方便的．但是对于有些以圆心为奇点的共轭解析函数就不能在奇点邻域内表成共轭幂级数．为此，本章将建立在圆环 $r<|z-a|<R$（$r\geqslant 0$，$R\leqslant+\infty$，当 $r=0$ 时为去心圆，$0<|z-a|<R$）内共轭解析的级数表示，并以它为工具去研究共轭解析函数在弧立奇点邻域内的性质．

§1．共轭解析函数的双边共轭幂级数展式

1．　双边共轭幂级数

考虑两个级数：

$$C_0+C_1\overline{(z-a)}+C_2\overline{(z-a)}^2+\cdots \tag{1}$$

$$\frac{C_{-1}}{\overline{z-a}}+\frac{C_{-2}}{\overline{(z-a)}^2}+\cdots \tag{2}$$

（1）式在收敛圆 $|z-a|<R$（$0<R\leqslant+\infty$）内表示一共轭解析函数；对（2）式作替换　$\zeta=\dfrac{1}{z-a}$，则它成为一共轭幂级数：

$$C_{-1}\overline{\zeta}+C_{-2}\overline{\zeta}^2+\cdots$$

设它在收敛区域 $|\zeta|<\dfrac{1}{r}$（$0<\dfrac{1}{r}\leqslant+\infty$），换回原来变数 z，即知(2)式在 $|z-a|>r$（$0\leqslant r<+\infty$）内表示一个共轭解析函数．当且仅当 $r<R$ 时，(1) 式与 (2) 式有公共收

敛区域：圆环$r<|z-a|<R$. 这时，我们称级数（1）式与（2）式之和为双边共轭级数，表示为

$$\sum_{-\infty}^{\infty} C_n \overline{(z-a)^n} \qquad (3)$$

由以上讨论，我们有：

定理 1 双边共轭幂级数(3)在其收敛圆环$r<|z-a|<R$内的和函数是一共轭解析函数，并且在任意较小的同心闭圆环$r'\leqslant|z-a|\leqslant R'(r<r'<R'<R)$上一致收敛.

2. 共轭解析函数的双边幂级数展式

前面，指出了双边共轭幂级数在其收敛圆环内表示一共轭解析函数，反过来，我们有：

定理 2 在圆环H：$r<|z-a|<R(r\geqslant 0,\ R\leqslant+\infty)$内的共轭解析函数$f(z)$可以展成双边共轭幂级数：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \overline{(z-a)^n} \qquad (4)$$

其中 $$C_n=\frac{-1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\overline{(\zeta-a)^{n+1}}}\overline{d\zeta} \qquad (n=0,\ \pm 1\cdots) \qquad (5)$$

且展式唯一.

定义 1 级称(4)式为$f(z)$在a点的双边幂数展式，称(5)式为$f(z)$在a点双边幂级数展式系数.

3. 双边共轭幂级数与共轭幂级数的关系

当已给函数$f(z)$在a点共轭解析时，中心在a、半径等于由a到$f(z)$的最近奇点的距离的那个圆可以看成圆环的特殊情形. 在其中就可作出双边共轭幂级数展式. 根据积分定理，由(5)式可以看出，这个展式所有系数$C_{-n}(n=1,\ 2\cdots)$都等于零. 此时，计算双边共轭幂级数的系数公式与共轭幂级数的系数公式没有差别，所以双边共轭幂级数转化为共轭

幂级数．因此共轭幂级数是双边幂级数的特殊情形．

4．共轭解析函数在弧立奇点邻域内的双边共轭幂级数展式

若$f(z)$在a点的某一去心邻域$K-\{a\}$：$0<|z-a|<R$内共轭解析，但在a点不共轭解析，则称a为$f(z)$的一个弧立奇点．

若a为$f(z)$的一个弧立奇点，则必存在正数R，使得在a点的去心邻域$K-\{a\}$：$0<|z-a|<R$内可展成双边共轭幂级数．

例 1 函数 $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在z平面内有两个弧立奇点$z=1$和$z=2$，试分别求$f(z)$在二点去心邻域内的双边共轭幂级数展式．

解 (1) 在去心邻域$0<|z-1|<1$内

$$f(z)=\frac{-1}{\overline{z-1}}+\frac{1}{\overline{z-2}}$$

$$=-\frac{1}{\overline{z-1}}+\frac{1}{\overline{(z-1)}-1}$$

$$=-\frac{1}{\overline{z-1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\overline{(z-1)}^{n}$$

(2) 在去心邻域$0<|z-2|<1$内

$$f(z)=\frac{1}{\overline{z-2}}-\frac{1}{\overline{z-1}}=\frac{1}{\overline{z-2}}-\frac{1}{\overline{z-2}+1}$$

$$=\frac{1}{\overline{z-2}}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\overline{(z-a)}^{n}$$

§2．共轭解析函数的弧立奇点

1．弧立奇点的三种类型

若a为$f(z)$的弧立奇点，则$f(z)$在a的某去心邻域$K-$

$\{a\}$内可以展成双边共轭幂级数 $f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} C_n \overline{(z-a)^n}$.

我们称 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n \overline{(z-a)^n}$ 为$f(z)$在 a 点的正则部分，称 $\sum_{n=0}^{\infty} C_{-n} \overline{(z-a)^n}$ 为 $f(z)$在a点的主要部分.

定义 2 设a是$f(z)$的弧立奇点.

(1) 若$f(z)$在a点的主要部分为零，则称a为$f(z)$的可去奇点.

(2) 若$f(z)$在a点的主要部分有有限项，设为

$$\frac{C_{-m}}{\overline{(z-a)^m}}+\frac{C_{-(m-1)}}{\overline{(z-a)^{m-1}}}+\cdots+\frac{C_{-1}}{\overline{z-a}} \quad (C_{-m}\neq 0)$$

则称a为$f(z)$的m级极点.

(3) 若$f(z)$在a点的主要部分有无穷多项，则称a为$f(z)$的本性奇点.

2．可去奇点

若a为$f(z)$的可去奇点，则有$f(z)=C_0+C_1\overline{(z-a)}+C_2\overline{(z-a)}^2+\cdots$ $(0<|z-a|<R)$. 上式右边表示圆 K: $|z-a|<R$内的共轭解析函数. 若令 $f(a)=C_0$，则 $f(z)$在圆K内与一个共轭解析函数重合. 也就是说，我们将 $f(z)$在点a的值加以适合定义，则a点是共轭解析点.

关于可去奇点，我们有：

定理 3 若a为 $f(z)$ 的弧立奇点，则下列三个条件是等价的：

(1) $f(z)$在a点的主要部分为零.

(2) $\lim_{z\to a} f(z)=b \quad (\neq\infty)$.

(3) $f(z)$在$K-\{a\}$内有界.

3．极点

定理 4 若 a 为 $f(z)$ 的弧立奇点，则下列三个条件是等价的：

(1) $f(z)$ 在 a 点的主要部分为

$$\frac{C_{-m}}{(z-a)^m}+\cdots+\frac{C_{-1}}{z-a} \qquad (C_{-m}\neq 0)$$

(2) $f(z)$ 在 a 点的某去心邻域 $K-\{a\}$ 内能表成

$$f(z)=\frac{\lambda(z)}{(z-a)^m}$$

共中 $\lambda(z)$ 在 a 点邻域内共轭解析，且 $\lambda(a)\neq 0$．

(3) $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 以 a 为 m 级零点．

对于极点的特征的说明，我们还有：

定理 5 $f(z)$ 的弧立奇点 a 为极点的必要充分条件是

$$\lim_{z\to a} f(z)=\infty$$

4．本性奇点

定理 6 $f(z)$ 的弧立奇点 a 为本性奇点的充分必要条件是 $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ 不存在．

定理 7 若 $z=a$ 为 $f(z)$ 的一个本性奇点，且在 a 点的充分小邻域内不为零，则 $z=a$ 也是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的一个本性奇点．

定理 8 若 a 为 $f(z)$ 的本性奇点，则对于任何常数 A（有限或无穷）都有一个收敛于 a 的点列 $\{z_n\}$ 使得

$$\lim_{z_n\to a} f(z_n)=A$$

定理 9 若 a 为 $f(z)$ 的本性奇点，则对于每一个 $A\neq\infty$，除掉可能一个值 $A=A_0$ 外，必有趋于 a 的无限点列 $\{z_n\}$ 使

$f(z_n)=A\ (n=1,2,\cdots)$.

§3. 共轭解析函数在无穷远点的性质

定义 3 设函数在无穷远点(去心)邻域：$N-\{\infty\}$，$+\infty>|z|>r\geqslant 0$ 内共轭解析，则称点∞为 $f(z)$ 的一个孤立奇点.

设点∞为$f(z)$的孤立奇点，利用变换 $z'=\frac{1}{z}$，于是

$$\varphi(z')=f\left(\frac{1}{z'}\right)=f(z)$$

在去心邻域 $K-\{0\}$：$0<|z'|<\frac{1}{r}$（如 $r=0$，规定 $\frac{1}{r}=+\infty$）内共轭解析，$z'=0$ 就是 $\varphi(z')$的一个孤立奇点.

我们还可以看到：

(1) 对于扩充 z 平面上无穷远点的去心邻域 $N-\{\infty\}$ 有z'平面上原点的去心邻域；

(2) 在对应点z与z'上，$f(z)=\varphi(z')$；

(3) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\lim\limits_{z'\to 0}\varphi(z')$.

由此得到启发：

定义 4 若 $z'=0$ 为$\varphi(z')$的可去奇点、m级极点或本性奇点，则我们相应地称 $z=\infty$为$f(z)$的可去奇点、m 级极点或本性奇点.

设在去心邻域$K-\{0\}$：$0<|z'|<\frac{1}{r}$ 内将 $\varphi(z')$ 展成双边共轭幂级数：

$$\varphi(z')=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n\overline{z'}^n$$

令 $z'=\frac{1}{z}$，则有

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \overline{z}^n \qquad (6)$$

其中 $b_n=C_{-n}$ $(n=0,\ \pm 1,\cdots)$.

(6)式称为$f(z)$在无穷远点去心邻域 $N-\{\infty\}$：$0<r<|z|<+\infty$内的双边共轭幂级数展式. 对应 $\varphi(z')$在 $z'=0$ 的主要部分，我们称 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \overline{z}^n$ 为 $f(z)$在$z=\infty$的主要部分.

由上述定义及性质(1)，(2)，(3)容易得到：

定理10 $f(z)$的弧立奇点 $z=\infty$为可去奇点的充分必要条件是下列三个条件任一条成立：

(1) $f(z)$在 $z=\infty$的主要部分为零；

(2) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=b$ $(\neq\infty)$;

(3) $f(z)$在$z=\infty$的某去心邻域$N-\{\infty\}$内有界.

定理11 $f(z)$的弧立奇点$z=\infty$为m级极点的充分必要条件是下列三条中的任一条成立：

(1) $f(z)$在$z=\infty$的主要部分为

$b_1\overline{z}+b_2\overline{z}^2+\cdots+b_m\overline{z}^m$ $(b_m\neq 0)$;

(2) $f(z)$在$z=\infty$的某去心邻域$N-\{\infty\}$内能表成

$$f(z)=\mu(z)\overline{z}^m$$

其中$\mu(z)$在$z=\infty$的邻域N内共轭解析，且$\mu(\infty)\neq 0$；

(3) $g(z)=\frac{1}{f(z)}$以 $z=\infty$为m级零点.

定理12 $f(z)$的弧立奇点 ∞ 为极点的充分必要条件是

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=\infty$$

定理13 $f(z)$的弧立奇点∞为本性奇点的充分必要条件是下列两条中的任一条成立：

(1) $f(z)$在$z=\infty$的主要部分有穷多项共轭幂不等于零

(2) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$不存在.

第五章　残数及应用

类似解析函数的残数，共轭解析函数也有残数．

§1．残数

1．残数的定义和残数定理

若函数在 a 点是共轭解析的，则根据积分定理：

$$\int_C f(z)\overline{dz}=0$$

其中C是一条围线，它的内部包含a点，$f(z)$在 D 内共轭解析，在$D+C$上连续．

但是，若a是$f(z)$的一个弧立奇点，且围线C全在C的某个去心邻域内并包围 a 点，则积分 $\int_C f(z)\overline{dz}$ 的值，一般说来，不再为零．由第二章定理９，这个积分值不依赖C的形状．利用双边共轭幂级数系数公式很容易计算出来．概括起来，我们有：

定义 1　设$f(z)$以有限点a为弧立奇点，则在 a 点的某去心邻域内可以展成双边共轭幂级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\overline{(z-a)}^n \quad (0<|z-a|<R)$$

我们称此展式中的$\dfrac{1}{\overline{z-a}}$这一项的系数

$$C_{-1}=\frac{-1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\overline{dz},\ \Gamma:\ |z-a|=\rho,\ 0<\rho<R$$

为$f(z)$在a点的残数，记为$\underset{z=a}{\mathrm{Res}}\ f(z)$．由积分定理知道，当$0<\rho<R$，残数的值与 ρ 的值无关．

由此可知，在有限可去奇点处，函数的残数总等于零．

下面的残数定理是应用残数求围线积分的根据．

定理 1 （残数定理）$f(z)$在围线或复围线C所范围的区域D内，除a_1，a_2，$\cdots a_n$外共轭解析，在闭域$\overline{D}=D+C$上除a_1，a_2，$\cdots a_n$外连续，则

$$\int_C f(z)\overline{dz}=-2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_k}f(z)$$

残数定理把计算围线积分的整体问题，化为计算各弧立奇点处残数的局部问题．

2．残数的求法．

下面的定理是求n级极点处残数的公式，对于级数过高的极点，计算起来并不一定简单．

定理 2 设a为$f(z)$的n级极点，$f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\overline{(z-a)}^n}$，其中$\varphi(z)$在$a$点共轭解析，$\varphi(a)\neq 0$，则

$$\operatorname*{Res}_{z=a}f(z)=\frac{\varphi^{[n-1]}(a)}{(n-1)!}$$

推论 1 设a为$f(z)$的一级极点 $\varphi(z)=\overline{(z-a)}f(z)$，则 $\operatorname*{Res}_{z=a}f(z)=\varphi(a)$．

推论 2 设a为$f(z)$的二级极点 $\varphi(z)=\overline{(z-a)}^2f(z)$，则 $\operatorname*{Res}_{z=a}f(z)=\varphi^0(a)$．

定理 3 设a为$f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$的一级极点（只要$\varphi(z)$及$\psi(z)$在$a$点共轭解析，且$\varphi(a)\neq 0$，$\psi(a)=0$，$\psi^0(a)\neq 0$），则 $\operatorname*{Res}_{z=a}f(z)=\dfrac{\varphi(a)}{\psi^0(a)}$

应用上面的定理及推论，计算低级极点处的残数是很方便的，下面试举几例．

1．计算积分 $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{5z-2}{z(z-1)^2}dz$

解 显然，$f(z)=\dfrac{5z-2}{z(z-1)^2}$ 在圆周 $|z|=2$ 内部有一级极点 $z=0$ 及二级极点 $z=1$．

由推论 1 $\displaystyle\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)=z\frac{5z-2}{z(z-1)^2}\Bigg|_{z=0}=-2$

由推论 2 $\displaystyle\operatorname*{Res}_{z=1}f(z)=\left[(z-1)^2\frac{5z-2}{z(z-1)^2}\right]'_{z=1}$

$$=\frac{2}{z^2}\Bigg|_{z=1}=2$$

所以 $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{5z-2}{z(z-1)}dz=-2\pi i(-2+2)=0$

例 2 计算积分 $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{z\sin z}{(1-e^z)^3}dz$

解 被积函数在 $|z|=1$ 内部以 $z=0$ 为弧立奇点，但此奇点性质不明，故采用级数展式求残数的方法：

$$\frac{z\sin z}{(1-e^z)^3}=\frac{z\left(z-\dfrac{z^3}{3!}+\cdots\right)}{-\left(z+\dfrac{z^2}{2!}+\cdots\right)^3}$$

$$=-\frac{z^2}{z^3}\,\frac{\left(1-\dfrac{z^2}{3!}+\cdots\right)}{\left(1+\dfrac{z}{2!}+\cdots\right)^3}$$

后面那个分式在 $z=0$ 处共轭解析，故可展成 $\overline{z}$ 的幂级数 $1+a_1\overline{z}+\cdots$，于是在 $z=0$ 的去心邻域内有

$$\frac{\overline{z}\ \overline{\sin z}}{\overline{(1-e^z)^3}}=-\frac{1}{\overline{z}}-a_1-\cdots$$

于是

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{\overline{z}\ \overline{\sin z}}{\overline{(1-e^z)^3}}=-1$$

所以原积分等于 $2\pi i$.

3. 无穷远点的残数

残数的概念可以推广到无穷远点的情形.

定义 2 设∞为$f(z)$的一个弧立奇点，$f(z)$在去心邻域 $N-\{\infty\}$：$0\leqslant r<|z|<+\infty$内共轭解析，

则称 $\dfrac{-1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma^-}f(z)\,\overline{dz}\left[\Gamma:\ |z|=\rho>r\right]$

为$f(z)$在点∞的残数，记为 $\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}f(z)$. 这里$\Gamma^-$是指顺时针方向.

设 $f(z)$在 $0\leqslant r<|z|<+\infty$内双边共轭幂级数展式为

$$f(z)=\cdots+\frac{C_{-n}}{\overline{z}^n}+\cdots+\frac{C_{-1}}{\overline{z}}+C_0+C_1\overline{z}+\cdots+C_n\overline{z}^n$$

由逐项积分定理及第二章例 3：

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty}f(z)=\frac{-1}{2\pi i}\int_{\Gamma^-}f(z)\,\overline{dz}=-C_{-1}$$

也就是说，$\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}f(z)$等于$f(z)$在$\infty$的双边共轭展式中$\dfrac{1}{\overline{z}}$这一项系数的相反数.

定理 4 若$f(z)$在扩充z平面上只有有限个弧立奇点(包括无穷远点)，设为$a_1, a_2, \cdots a_n, \infty$, 则$f(z)$在各点的残数总和为零.

§3. 幅角原理

1. 对数残数

残数的重要应用之一是计算积分$\frac{-1}{2\pi i}\int_c \frac{f^0(z)}{f(z)}\overline{dz}$，它称为$f(z)$的对数残数，由它推出的幅角原理提供了计算共轭解析函数零点个数的一个有效方法.

定理 5 (1)设a为$f(z)$的m级零点,则a必为函数$\frac{f^0(z)}{f(z)}$的一级极点，并且 $\underset{z=a}{\mathrm{Res}}\left[\frac{f^0(z)}{f(z)}\right]=m$.

(2)设b为$f(z)$的n级极点，则b为函数$\frac{f^0(z)}{f(z)}$的一级极点，并且

$$\underset{z=b}{\mathrm{Res}}\left[\frac{f^0(z)}{f(z)}\right]=-n$$

定理 6 设C为一围线，$f(z)$满足下列条件：

(1) $f(z)$在C的内部除可能有有限个极点外是共轭解析的；

(2) $f(z)$沿C上共轭解析且不为零.

则

$$\frac{-1}{2\pi i}\int_C \frac{f^0(z)}{f(z)}\overline{dz}=N(f,C)-P(f,C) \qquad (1)$$

其中$N(f,c)$：$f(z)$在C内部的零点个数；

$P(f,c)$：$f(z)$在C内部的极点个数.

(一个m级零点算m个零点，一个n级极点算n个极点).

2. 幅角原理

公式(1)左端：

$$\frac{-1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{f^0(z)}}{f(z)}\overline{dz} = \frac{-1}{2\pi i}\int_C \frac{d}{dz}\left[\overline{\ln\overline{f(z)}}\right]\overline{dz}$$

$$= \frac{-1}{2\pi i}\{[\ln|f(z_0)|+i\varphi_1]-[\ln|f(z_0)|+i\varphi_0]\}$$

$$= \frac{-(\varphi_1-\varphi_0)}{2\pi}$$

其中：φ_0为$\arg f(z)$开始时值；

φ_1为绕行后$\arg f(z)$的值.

于是我们可以把定理 6 改写成：

定理 7 （幅角原理）在定理 6 的条件下，$f(z)$在围线C内部的极点个数与零点个数之差，等于当z沿C之正向绕行一周后$\arg f(z)$的改变量$\Delta_c \arg f(z)$除以2π，即

$$P(f,c)-N(f,c)=\frac{\Delta_c \arg f(z)}{2\pi}$$

下面的定理在判定共轭解析函数零点的位置时常要用到.

定理 8 设C为一围线，函数$f(z)$及$\varphi(z)$满足下列条件：

(1) 它们在C上及其内部均共轭解析；

(2) 在C上，$|f(z)|>|\varphi(z)|$.

则$f(z)$与$f(z)+\varphi(z)$在C的内部有同样多的零点，

即 $$N(f+\varphi,c)=N(f,c).$$

定理 9 若$f(z)$在域D内单叶共轭解析，则在D内$f^0(z)\neq 0$.

第六章　共轭解析开拓

本章我们将讨论已知区域内共轭解析函数定义域的扩大问题．即研究在什么条件下能够开拓成为更大区域内的共轭解析函数，并讨论一些常用的共轭解析开拓方法．

§1．共轭解析开拓的概念和幂级数开拓

1．定义

定义 1　设$f(z)$在区域D内共轭解析，考虑一个包含D的更大区域G，若存在$F(z)$在G内共轭解析，且在D内$F(z)=f(z)$，则称$f(z)$可以共轭解析开拓到G内，并称$F(z)$为$f(z)$在域G内的共轭解析开拓．

这样定义的共轭解析开拓是唯一的，这由共轭解析函数的唯一性定理很容易证明．

例1　$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\overline{z^n}=f(z)$　　$(D: |z|<1)$

而$\dfrac{1}{1-z}$在z平面上只有一个奇点$z=1$，故$F(z)=\dfrac{1}{1-z}$就是$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\overline{z^n}$在区域$G$（$z$平面上去掉1）内的共轭解析开拓。

定义 2　设D是一个区域，$f(z)$是D内的单值共轭解析函数，二元体$\{D, f(z)\}$称为一个共轭解析元素；两个共轭解析元素当且仅当其区域重合，而且在其上对应的函数值相等时，才是恒等的．

定理 1　设$\{D_1, f_1(z)\}$，$(D_2, f_2(z)\}$为二个共轭解析元素，且

(1)区域D_1和D_2有一公共区域d_{12}、D_1及D_2互不包含；

(2) $f_1(z)=f_2(z)$, $z\in d_{12}$

则 $\{D_1+D_2, F(z)\}$ 也是一个共轭解析元素.

其中

$$F(z)=\begin{cases} f_1(z) & z\in D_1-d_{12} \\ f_2(z) & z\in D_2-d_{12} \\ f_1(z)=f_2(z) & z\in d_{12} \end{cases}$$

定义 3 若 (1) $D_1\cap D_2=d_{12}$ 为一区域, D_1 及 D_2 互不包含; (2) $f_1(z)=f_2(z)$, $z\in d_{12}$, 则共轭解析元素 $\{D_1, f_1(z)\}$ 及 $\{D_2, f_2(z)\}$ 称为互为直接共轭解析开拓.

2. 共轭解析开拓的共轭幂级数方法

给定一个共轭解析元素, 求它的共轭解析开拓的最基本方法是采用共轭幂级数法.

给定共轭解析元素 $\{D_1, f_1(z)\}$, 并设 z_1 是 D_1 内的任一点, 则 $f_1(z)$ 可在 z_1 点的邻域内展成共轭幂级数

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(1)}\overline{(z-z_1)}^n \tag{1}$$

若这个级数的收敛半径为 $+\infty$, 换句话说, 即在 z 平面上每一点处级数 (1) 都收敛. 这时级数 (1) 的和表示一个在 z 平面上处处共轭解析的函数, 而在 D_1 内与 $f_1(z)$ 相同. 据根共轭解析开拓的唯一性, 这个函数就是 $f_1(z)$ 在 D_1 以外的共轭解析开拓.

若级数 (1) 的收敛半径为有限正数 R_1, 则我们在级数的收敛圆 Γ_1: $|z-z_1|<R_1$ 内取一个不是圆心的点 z_2, 并在点 z_2 的邻域内把 $f_1(z)$ 展开为共轭幂级数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(2)}\overline{(z-z_2)}^n \tag{2}$$

其中 $C_n^{(2)}=\frac{1}{n!}f_1^{n}(z_2)$.

若级数（2）的收敛半径为R_2，则R_2一定满足不等式：

$$R_2 \geqslant R_1 - |z_2 - z_1| \qquad (3)$$

下面就（3）的两种情形进行讨论.

若$R_2 = R_1 - |z_2 - z_1|$，则级数（2）给出的收敛圆内那些点的值已被级数（1）确定了. 此时级数（1）和级数（2）的收敛圆周的切点ξ就是$f_1(z)$的一个奇点，即沿着半径从z_1到z_2的方向$f_1(z)$不能进行开拓.

若$R_2 > R_1 - |z_2 - z_1|$，则新的收敛圆Γ_2就越出了原来的圆Γ_1外. 于是级数(2)在圆Γ_2内表示一共轭解析函数，设为$f_2(z)$，则在$\Gamma_1 \cap \Gamma_2$内$f_1(z) = f_2(z)$，因而$\{\Gamma_2, f_2(z)\}$是$\{\Gamma_1, f(z)\}$的直接共轭解析开拓.

最后，我们指出：1）若级数（1）的和函数在收敛圆的任一方向都不能进行共轭解析开拓，则此级数的收敛圆就是和函数的存在区域；2）由于共轭幂级数收敛圆周上至少存在一个和函数的奇点，所以在收敛圆内所定义的共轭解析函数向任意方向都可以开拓的情形是不可能发生的.

§2. 透弧共轭解析开拓及对称原理

上节提到的直接共轭解析开拓是关于相交区域的，若二区域不相交，但有一段公共边界，我们也可以进行直接共轭解析开拓.

定理 2 设$\{D_1, f_1(z)\}$，$\{D_2, f(z)\}$为二个共轭解析元素，且：1）区域D_1与D_2不相交，但有一段公共边界，除掉共端点后的开弧记为Γ；2）$f_1(z)$在$D_1+\Gamma$上连续，$f_2(z)$在$D_2+\Gamma$上连续；3）沿Γ，$f_1(z) = f_2(z)$，则$\{D_1+\Gamma+D_2, F(z)\}$也是一个共轭解析元素. 其中

$$F(z)=\begin{cases} f_1(z) & z\in D_1 \\ f_1(z)=f_2(z) & z\in\Gamma \\ f_2(z) & z\in D_2 \end{cases}$$

定义4 称满足定理 2 条件的二个共轭解析元素 $\{D_1, f_1(z)\}$，$\{D_2, f_2(z)\}$ 互为透弧共轭解析开拓.

定理 3 1) D和D^*为z平面上两个区域，分别在上半平面与下半平面，关于x轴对称，并且它们的边界都包含轴上一条线段S；2) $\{D, f(z)\}$为共轭解析元素，$f(z)$在$D+S$上连续且在S上取实数值，则$\{D+S+D^*, F(z)\}$也是一个共轭解析元素。其中

$$F(z)=\begin{cases} f(z) & z\in D+S \\ \overline{f(\overline{z})} & z\in D^* \end{cases}$$

多值共轭解析函数的讨论完全类似解析函数的讨论，由于比较复杂，在这里就不讨论了。

第七章　共轭解析函数的几何理论

一个复变函数 $w=f(z)$，从几何观点看来，可以解释为从 z 平面到 w 平面之间的一个变换．本章将给出共轭解析函数所构成的变换的某些重要特征．我们将看到，这种变换在共轭导数不为零的点处具有一种保持角度数量不变，方向相反，伸长度相同特征．下一章可以看到这一特性在流体力学、弹性力学、电学等学科的某些实际问题中都是一种重要工具．

§1．共轭解析变换的特征

1．共轭导数的几何意义

设 $w=f(z)$ 在域 D 内连续，$z_0\in D$，在 z_0 点有共轭导数 $f^0(z_0)\neq 0$，通过 z_0 任意引一条有向连续曲线 C：$z=z(t)$ $(t_0\leqslant t\leqslant t_1)$，$z_0=z(t_0)$．若 $z'(t_0)$ 存在且 $z'(t_0)\neq 0$，则 c 在 z_0 点有切线，$z'(t_0)$ 就是它的切量，它的倾角为 $\varphi=\arg z'(t_0)$．经过变换 $w=f(z)$，C 之象曲线 $\Gamma=f(c)$ 的参数方程为 Γ：$w=f(z(t))$，$(t_0\leqslant t\leqslant t_1)$，相应曲线切向量的倾角为 ψ.

现考虑解析函数 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 的情形．经过 $\overline{w}=\overline{f(z)}$ 变换，曲线 C 变为 $\overline{\Gamma}$，相应曲线切向量的倾角为 $\overline{\psi}$，令 $\alpha=\arg f^0(z_0)$．由解析函数的保角性质：

$$\overline{\psi}-\varphi=\arg(\overline{f(z_0)})'$$

由导数与共轭导数的关系：

$$\arg(\overline{f(z_0)})'=-\alpha$$

$$\overline{\psi}=-\psi$$

代入上式：

$$-\psi-\varphi=-\alpha$$

所以 $\alpha=\psi+\varphi$

这就是共轭导数幅角的几何意义，它表示曲线C在z_0处的切线倾角与象曲线Γ在$f(z_0)$处切线倾角之和.

其次若经过z_0点有两条有向连续曲线C_1、C_2.设$C_i(i=1,2)$在z_0点的切线倾角为$\varphi_i(i=1,2)$，C_i在变换$w=f(z)$下的象曲线Γ_i在$w_0=f(z_0)$点的切线倾角为$\psi_i(i=1,2)$，则由（1）式：

$$\psi_1+\varphi_1=\psi_2+\varphi_2=\alpha$$

所以 $\psi_1-\psi_2=-(\varphi_1-\varphi_2)$

于是我们有：

定理 1 在连续变换$w=f(z)$下，若$f^0(z_0)\neq 0$，则经过z_0点有切线的任意两条有连续曲线的夹角与其象曲线在$w_0=f(z_0)$点的夹角大小相等，方向相反.

由于 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{|\Delta w|}{|\Delta z|}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\left|\dfrac{\Delta w}{\overline{\Delta z}}\right|=|f^0(z_0)|\neq 0$

说明变换$w=f(z)$在z_0有等伸缩率，这也就是共轭导数模的几何意义.

定义 1 利用连续函数所作的变换，使通过已知点的任两条有向连续曲线间的夹角的大小相同，方向相反，则称此变换在此点是反向保角的；若连续变换在区域D内各点均反向保角，则称它在D内是反向保角的，也称它为区域D内的反向保角变换.

由定理1及定义1，我们有：

定理 2 若$w=f(z)$在域D内共轭解析，则它在共轭导数不为零的各点是反向保角的.

推论 若$w=f(z)$在区域D内单叶共轭解析，则$w=$

$f(z)$在D内反向保角.

2. 共轭解析变换的保域性.

借助解析变换的保域性，容易得到：

定理 3 设 $w=f(z)$ 在区域D内共轭解析，且不恒为常数，则 D 的象 $G=f(D)$也是一个区域.

推论 设 $w=f(z)$在区域D内单叶共轭解析，则 D 的象 $G=f(D)$也是一个区域.

3. 单叶共轭解析变换的反向保形性

定义 2 若 $w=f(z)$ 在区域D内是单叶、反向保角的，则称此变换 $w=f(z)$在D内是反向保形的，也称它为D内的反向保形变换.

定理 4 设 $w=f(z)$ 在区域 D内单叶共轭解析，则 1) $w=f(z)$将 D 反向保形变换成区域 $G=f(D)$；2) 反函数 $z=f^{-1}(w)$在区域D内单叶共轭解析，且

$$(f^{-1}(w_0))^0=\frac{1}{\overline{f^0(z_0)}}\quad(z_0\in D, w_0=f(z_0)\in G)$$

显然，两个反向保形变换的复合是一个保形变换.

下面我们研究几种初等共轭解析函数构成的反向保形变换，它们在反向保形变换中都是很基本的.

§2. 共轭线性变换

1. 共轭线性变换及其分解

$$w=\frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}\left(\text{其中}\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc\neq 0\right)\quad(1)$$

称为共轭线性变换.

条件$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\neq 0$是必要的，否则$w$恒为常数.

此外，我们将（1）式在扩充z平面上加以补充定义：若$c\neq 0$，在$z=\overline{\left(-\frac{d}{c}\right)}$处，定义$w=\infty$；在$z=\infty$处，定义$w=\frac{a}{c}$；若$c=0$，在$z=\infty$处，定义$w=\infty$.

于是，我们总认为共轭线性变换是定义在扩充平面上的．变换（1）式，将扩充z平面一对一地因而单叶地变成扩充w平面．事实上，（1）式具有逆变换：

$$z=\overline{\left(\frac{-dw+b}{cw-a}\right)}$$

共轭线性变换（1）式总可以分解成下述简单类型变换的复合：

（Ⅰ）　$w=k\bar{z}+h$　　　　$(k\neq 0)$

（Ⅱ）　$w=\frac{1}{z}$

（Ⅲ）　$w=kz+h$

事实上，当$c=0$时，（1）式已是（Ⅰ）型变换：

$$w=\frac{a}{d}\bar{z}+\frac{b}{d}$$

当$c\neq 0$时，（1）式可改写为

$$w=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(c\bar{z}+d)}=\frac{bc-ad}{c}\quad\frac{1}{c\bar{z}+d}+\frac{a}{c}$$

它就是下面形如(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲ)的变换：

$$\xi=c\bar{z}+d$$

$$\eta=\frac{1}{\xi}$$

$$w=\frac{bc-ad}{c}\eta+\frac{a}{c}$$

的复合.

因此，弄清楚(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲ)型变换的几何性质，就可弄清楚一般共轭线性变换(1)的性质.

下面我们来考察(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲ)型变换的几何意义.

(Ⅰ)**型变换** $w=k\overline{z}+h(k\neq 0)$ 可称为反向整线性变换. 若 $k=\rho e^{i\alpha}$ ($\rho>0$, α 为实数)，则

$$w=\rho e^{i\alpha}\overline{z}+h$$

由此可见，此变换就是先将 z 关于实轴对称变换，然后旋转角度 α，再作以原点为中心的按比例为 ρ 的相似变换，最后平移一个向量 h. 也就是说，在反向整线性变换之下，原象与象相似，只不过这种变换是改变了图形方向的相似变换.

(Ⅱ)**型变换** $w=\frac{1}{z}$ 众所周知是一个倒数变换，它可分解为 $\omega=\frac{1}{\overline{z}}$，$w=\overline{\omega}$ 二种简单变换的复合. 前者称为单位圆周的对称变换，后者关于实轴的对称变换.

(Ⅲ) **型变换** $w=kz+h$ 就是一个整线性变换. 若 $k=\rho e^{i\alpha}$，则 $w=\rho e^{i\alpha}z+h$. 此变换就是先将 z 旋转角度 α，然后作一个以原点为中心，比例系数为 ρ 的相似变换，最后平移一个向量 h.

2. 共轭线性变换的保圆性

形如(Ⅰ)、(Ⅲ)的整线性变换显然将圆周（直线）变为圆周（直线）. 这可由它们的几何意义得知.

形如（Ⅱ）的倒数变换将圆周（直线）变成圆周或直

线.

由于共轭线性变换（1）是(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲ)型变换的复合，于是我们证明了：

定理 5 共轭线性变换将平面上的圆周（直线）变为圆周或直线.

我们把直线看成是通过无穷远点的圆周，于是，我们可以说，共轭线性变换将扩充平面上的圆周变为扩充面上的圆周.

3. 共轭线性变换的反向保形性

由于共轭线性变换(1)在扩充平面上是单叶的，所以我们只要说明它在扩充平面上是反向保角的. 因为(1)由(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲ)复合而成，而(Ⅰ)是反向保角的，(Ⅱ)、(Ⅲ)则是保角的，所以（1）是反向保角的. 于是，我们就证明了：

定理 6 共轭线性变换（1）在扩充平面上是反向保形的.

4. 共轭线性变换保共轭交比性

定义 3 若连续变换将$\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$变成

$\overline{\left(\frac{w_4-w_1}{w_4-w_2}\right)}:\overline{\left(\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}\right)}$，则称变换具有保共轭交比性.

（其中z_1，z_2，z_3，z_4相异）

定理 7 共轭线性变换具有保共轭交比性.

证 对（Ⅰ）型变换来说，设

$$w_i = k\overline{z_i}+h \quad (i=1、2、3、4)$$

则 $$\frac{w_4-w_1}{w_4-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}$$

$$=\frac{(k\overline{z_4}+h)-(k\overline{z_1}+h)}{(k\overline{z_4}+h)-(k\overline{z_2}+h)}:\frac{(k\overline{z_3}+h)-(k\overline{z_1}+h)}{(k\overline{z_3}+h)-(k\overline{z_2}+h)}$$

$$=\left(\overline{\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}}\right):\left(\overline{\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}}\right)$$

可见，(Ⅰ)型具有保共轭交比性，(Ⅱ)、(Ⅲ)型显然具有保比性．由于共轭线性变换(1)是(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲ)型复合，所以它具有保共轭交比性．

由这个定理可得确定共轭解析变换的条件：

定理 8 设共轭线性变换扩充z平面上的三个相异点z_1、z_2、z_3指定变为w_1、w_2、w_3，则此共轭线性变换唯一确定，并且可写成：

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\left(\overline{\frac{z-z_1}{z-z_2}}\right):\left(\overline{\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}}\right)$$

5．共轭线性变换的保对称点性

定理 9 设扩充z平面两点z_1、z_2关于圆周r对称，$w=L(\overline{z})$为一共轭线性变换，则$w_1=L(\overline{z_1})$，$w_2=L(\overline{z_2})$两点关于圆周$\Gamma=L(r)$对称．

此结论仿线性变换保对称点性的证明易证．

§3 某些初等共轭函数所构成的反向保形变换

1．共轭幂函数与共轭根式函数

共轭幂函数 $w=\overline{z^n}$ (2)

其中n是大于1的自然数，它除了$z=0$及$z=\infty$外，处处具有不为零的共轭导数．因而在这些点是反向保角的．(2)的单叶性区域是顶点在原点张度不超过$\frac{2\pi}{n}$的角形区域．因

此，(2) 式将角形区域 $0<\arg z<\alpha$，$\left(0<\alpha\leqslant\frac{2\pi}{n}\right)$反向保形变换成角形区域：$-n\alpha<\arg w<0$.

作为 $w=\overline{z^n}$的逆变换：

$$z=\overline{\sqrt[n]{w}} \tag{3}$$

将 w平面上的角形区域：$-n\alpha<\arg w<0$，反向保形变换成 z 平面上的角形区域：$0<\arg z<\alpha$（这里$\overline{\sqrt[n]{w}}$是D内的一个单值共轭解析分支）．

对于一般共轭幂函数：

$$w=\overline{z^{\alpha}}=e^{\alpha\overline{\ln z}} \tag{4}$$

由于 $(\overline{z^{\alpha}})^{0}=\overline{\alpha}\,\overline{z^{\alpha-1}}$，(4)仍在点 $z=0$及 $z=\infty$ 不反向保角。

当 $\alpha>1$ 时，$w=\overline{z^{\alpha}}$的主值将角形域：$-\frac{\pi}{\alpha}<\arg z<\frac{\pi}{\alpha}$

反向保形变换成沿负实轴割破的w 平面。

当 $\alpha<1$ 时，不能将一角形域反向保形交换为有割縫的 w 平面.

2. 共轭指数函数与共轭对数函数

共轭指数函数 $w=\overline{e^{z}}$ (5)

在任意有限点均有 $(\overline{e^{z}})^{0}=\overline{e^{z}}\neq0$，因而它在 z 平面上是反向保角的.

(5)式的单叶性区域是平行于实轴宽不超过 2π的带形区域．于是(5)式将带形区域：$0<Imz<h$ $(0\leqslant h\leqslant2\pi)$ 反向保形变换成变换成角形区域．$-h<\arg w<0$.

作为$w=\overline{e^{z}}$的逆变换：

$$z=\overline{Lnw} \tag{6}$$

它将w平面上的角形区域G：$-h<\arg w<0$（$0<h\leqslant 2\pi$）反向保形变换成z平面上的带形区域g：$0<I_m z<h$（这里$\overline{Lnw}$是G内的一个单值共轭解析分支）．

§4. 关于反向保形变形的存在定理及边界对应定理

1. 反向保形变换的存在定理

不少实际问题要求我们将一个指定的区域反向保形变换成另一区域来处理．我们已经知道一个单叶共轭解析函数能够将它的单叶性区域反向保形变换成另一个区域．于是，我们很自然地反过来考虑反向保形变换理论中的一个基本问题：

"在扩充平面上任意给定两个单连通区域D与G，是否存在一个（单叶）共轭解析函数，使D变成G？简单地说，单连通区域D能反向保形变换成单连通区域G的条件是什么？唯一性条件是什么？"

上述问题可以简化成：

"在扩充平面上任给单连通区域D，能否反向保形变换成单位圆？在什么条件下，这种变换是唯一的？"

由于反向保形变换可以看成一个保形变换加上一个实轴对称变换，因此参照黎曼存在唯一性定理不难得出：

定理 6 （存在唯一性定理）扩充z平面上的单连通区域D，其边界点不止一点，则有一个且只有一个在D内的单叶共轭解析函数$w=f(z)$，它将D反向保形变换成单位圆$|w|<1$，且满足条件：

$$f(a)=0,\ f^0(a)>0\ (a\in D)$$

2. 上面的讨论限于区域内部的反向保形变换，未涉及边界，类似保形变换的讨论，我们有：

定理 7 （对应边界定理）设（1）单连通区域D与G的

边界分别为简单闭曲线C与Γ；（2）$w=f(z)$将D反向保形变换成G。则$f(z)$可以扩张成$F(z)$，使在D内$F(z)=f(z)$，在$\overline{D}=D+C$上连续，并将C双方单值且连续地变成Γ。

此结论的逆结论亦成立。

关于多角形区域的反向保形变换，为了避免过多的重复，我们不再讨论了，读者可以验证多角形区域的保形变换的结果几乎完全照搬。

第八章　共轭解析函数应用简介

本章就共轭解析函数在流体力学、静电场、弹性力学、几何等几个不同领域的应用举例，说明了它的应用价值.

§1. 流体力学上的应用

设不可压缩密度均匀的流体在区域D内作平面稳定流动，$v=v_x+iv_y$ 表示每一点的运动速度，v_x、v_y 分别表示速度在 x轴、y 轴上的分量.

在区域D内考虑一条闭曲线r，它的内部也属于D，ds 表示曲线r的弧长s的微分，dn 表示曲线r的法线方向的微分，且当沿着正方向经过曲线r时，法线n永远在曲线r的右边.

若流体在D内是无源的，则在D内任一点都有

$$div = \frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0 \tag{1}$$

若流体在D内是无旋的，则在D内任一点都有

$$\text{rot}\ v = \frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}=0 \tag{2}$$

于是，对于无源、无旋的不可压缩流体的稳定流动来说，速度$v=v_x+iv_y$一定满足(1)、(2)条件，因此，它是一个共轭解析函数. 反之，对于不可压缩流体的稳定流动来说，若速度$v=v_x+iv_y$处处满足共轭解析条件，则可断定此流动在域D内是无源无旋的. 于是，对于不可压缩流体平面稳定流动，我们有：

定理 1　流动在域D内无源无旋的充分必要条件是流速在D内是共轭解析的.

从（1）式还可以看出，$-v_y dx+v_x dy$是某个二元函数 $\psi(x,y)$的全微分，即

$$d\psi(x,y)=v_y dx-v_x dy$$

于是

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=v_y,\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=-v_x \tag{3}$$

由此得

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial y}}=\frac{v_y}{v_x}$$

这说明，等值线 $\psi(x,y)=C_1$上每一点的流速$v=v_x+iv_y$都与等值线 $\psi(x,y)=C_1$相切．因此，$\psi(x,y)=C_1$是流动在无源时的流线．

同样，从（2）式也可以看出，$v_x dx+v_y dy$是某个二元函数 $\psi(x,y)$的全微分，即

$$d\varphi(x,y)=v_x dx+v_y dy$$

由此得到

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=v_x,\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=v_y \tag{4}$$

于是

$$\mathrm{grad}\,\varphi=(v_x,v_y)=v$$

这表示函数 $\varphi(x,y)$是流动的函势数，而等值线$\varphi(x,y)=C_2$就是等势线．

比较（3）、（4）式可以得到

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{\partial\psi}{\partial y},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

由此可见，$f(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$在单连通区域$D$内是共

轭解析的，这个函数称为刻划流体在区域D内流动的复形．

对$f(z)$求共轭导数：

$$f^0(z)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x}=v_x+iv_y$$

这就是流速．

由此可见，无源无旋流动的复形、流速都是共轭解析函数，且有，复形的共轭导数是流速．这样，我们用共轭解析函数来描写、研究无源无旋流动就非常方便．由于它是直接描述，所以比解析函数直观．

此外还有

$$I=\int_C f^0(z)\,\overline{dz}=\int_C(v_x+iv_y)(dx-idy)$$

$$=\int_C v_x dx+v_y dy+i\int_C v_y dx-v_x dy$$

$$=\Gamma+iN$$

其中C是D内任意闭曲线，Γ、N分别是环量、流量．

例 1　设平面稳定流动的复形为$f(z)=a\overline{z}(a>0)$，求速度、流函数、流线、势函数、等势线．

解　$f^0(z)=a$，故每点速度为a．

$$f(z)=ax-iay$$

故　流函数为$-ay$，流线$ay=C_1$，

势函数为　ax，等势线$ax=C_2$．

所以复形刻划了流体以等速a从平面的左方向右方的流动情形．

例 2　设平面稳定流动的复形为$f(z)=\dfrac{1}{\overline{z}}$，求速

度、流函数、流线、势函数、等势线.

解 流速： $f^0(z) = -\frac{1}{\bar{z}^2}$

由于 $f(z) = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{\bar{z}z} = \frac{x+iy}{x^2+y^2}$

所以

流函数： $\frac{y}{x^2+y^2}$ 流线： $\frac{y}{x^2+y^2} = C_1$

势函数： $\frac{x}{x^2+y^2}$ 等势线： $\frac{x}{x^2+y^2} = C_2$

§2. 静电学中的应用

在平面电场中，电位 $u(x,y)$ 和电通 $v(x,y)$ 都是调和函数，而且，等位线（相当于流线）$u(x,y)=C_1$ 和电力线（相当等势线）$v(x,y)=C_2$ 互相正交. 这种性质正和一个共轭解析函数的实部和虚部所具有的性质相符合. 我们引进共轭解析函数：

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

其中 $u(x,y)$ 是电场的电位，$v(x,y)$ 是电场的电通，我们称 $f(z)$ 为电场的复形.

于是，我们就可利用共轭解析函数把电场的电位和电通有机地结合起来.

此外，我们还可以看到：

$$f^0(z) = u_x + iu_y = \mathrm{grad}\,u = -\mathbf{E} \text{（负场强）}$$

即复形的共轭导数为电位的梯度（负场强），且

$$|\mathbf{E}| = |f^0(z)| \quad \arg\mathbf{E} = \pi + \arg f^0(z)$$

因此，用共轭解析函数来描述静电场也相当方便、直

观，这是解析函数所不及的.

类似流体力学的讨论，我们有：

定理 2 静电场是管式有位场的充分必要条件是场强是共轭解析的.

例 3 设静电场的复形为$f(z)=\frac{1}{z}$，求电位、等位线，电通，电力线，场强.

解

电位 $u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$，等位线 $\frac{x}{x^2+y^2}=C_1$

电通 $v(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}$，电力线 $\frac{y}{x^2+y^2}=C_2$

场强 $\mathbf{E}=-f^0(z)=\frac{1}{z^2}$

即 $|\mathbf{E}|=\frac{1}{|z|^2}$，$\arg\mathbf{E}=2\arg z$

§3. 弹性力学上的应用

——用共轭解析函数表示平面问题的应力函数、位移和应力

我们知道，在弹性力学里，在体积力为自重的情况下，解平面问题归结为求满足双调和方程：

$$\nabla^2(\nabla^2\varphi)=\nabla^4\varphi=0 \tag{5}$$

的应力函数 φ，并满足边界条件。我们可用共轭解析函数求这双调和方程的解，也就是可用共轭解析函数表示平面的应力函数.

我们取

$$P=\nabla^2\varphi \tag{6}$$

由（5）式知 $\nabla^2 P=0$，因此 P是调和函数，取调和函数Q使 $f(z)=P-iQ$ 为共轭解析函数。

令 $\psi(z)=\frac{1}{4}\int f(z)\overline{dz}=p-iq$也为共轭解析，

且

$$\psi^0(z)=\frac{1}{4}f(z)=\frac{1}{4}(P-iQ)$$

于是

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{1}{4}P,\quad \frac{\partial q}{\partial y}=\frac{1}{4}P$$

因为 p, q 调和，所以 $\nabla^2 p=0$，$\nabla^2 q=0$，

所以

$$\nabla^2(xp)=x\nabla^2 p+2\frac{\partial p}{\partial x}=2\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\nabla^2(yq)=y\nabla^2 q+2\frac{\partial q}{\partial y}=2\frac{\partial q}{\partial y}$$

于是

$$\nabla^2(xp+yq)=2\frac{\partial p}{\partial x}+2\frac{\partial q}{\partial y}=P$$

$$\begin{aligned}&\nabla^2(\varphi-xp-yq)\\&\quad=\nabla^2\varphi-\nabla^2(xp+yq)=P-P=0\end{aligned}$$

令

$p_1=\varphi-xp-yq$，显然 p_1也是调和函数。

则

$$\varphi=xp+yq+p_1 \tag{7}$$

引入调和函数 q_1，使

$\chi(z)=p_1-iq_1$ 共轭解析，

于是，

$$
\begin{aligned}
& z\psi(z)+\chi(z) \\
&\quad =(x+iy)(p-iq)+p_1-iq_1 \\
&\quad =(xp+yq+p_1)-i(xq-py+q_1)
\end{aligned}
$$

由（7）式得：

$$\varphi=Re(z\varphi(z)+\chi(z)) \tag{8}$$

或

$$\varphi=\frac{1}{2}(z\psi(z)+\chi(z)+\overline{z}\ \overline{\psi(z)}+\overline{\chi(z)} \tag{9}$$

（8）、（9）两式表示任何应力函数可用适当选择的共轭解析函数表示。

下面我们可以看到，位移和应力亦可用这些共轭解析函数表示。

对于无体积力的平面应力问题，位移 u、v 与应力函数有如下关系：

$$
\left\{
\begin{aligned}
& \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{E}(\sigma_x-\nu\sigma_y)=\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right) \\
& \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{E}(\sigma_y-\nu\sigma_x)=\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) \\
& \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}=-\frac{2(1+\nu)}{E}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}
\end{aligned}
\right. \tag{10}
$$

由 $P=\nabla^2\varphi=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$，$\dfrac{\partial p}{\partial x}=\dfrac{\partial q}{\partial y}=\dfrac{1}{4}P$

(10)式的前二式变为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{E}\left[4\dfrac{\partial p}{\partial x}-(1+\nu)\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right] \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{1}{E}\left[4\dfrac{\partial q}{\partial y}-(1+\nu)\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right] \end{cases}$$

二式积分

$$\begin{cases} u=\dfrac{1}{E}\left[4p-(1+\nu)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+g_1(y)\right] \\ v=\dfrac{1}{E}\left[4q-(1+\nu)\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+g_2(x)\right] \end{cases} \tag{11}$$

将（1）式代入（10）式的第三式：

$$4\left(\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial q}{\partial x}\right)-2(1+\nu)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+\frac{dg_1}{dy}+\frac{dg_2}{dx}$$

$$=-2(1+\nu)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}$$

因为 $$\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial q}{\partial x}=0$$

所以 $$\frac{dg_1}{dy}+\frac{dg_2}{dx}=0$$

于是

$$\frac{dg_1}{dy}=-\frac{dg_2}{dx}=C \quad （常数）$$

$$g_1(y)=Cy+C_1,\quad g_2(x)=-Cx+C_2$$

可知 $g_1(y)$，$g_2(x)$表示刚体位移．去掉这些项后，（1）式变为

$$\begin{cases} u=\dfrac{1}{E}\left[4p-(1+\nu)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right] \\ v=\dfrac{1}{E}\left[4q-(1+\nu)\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right] \end{cases}$$

或 $u+iv$

$$=\frac{1}{E}\left[4(p+iq)-(1+\nu)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right] \tag{12}$$

对（7）式：$\varphi=xp+yq+p_1$两边对 x，y 求导后，整理：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\overline{\psi(z)}+z\psi^0(z)+\chi^0(z) \tag{13}$$

代入（12）式：

$$u+iv=\frac{3-\nu}{E}\overline{\psi(z)}-\frac{1+\nu}{E}[z\psi^0(z)+\chi^0(z)] \tag{14}$$

（14）式即为用共轭解析函数 $\psi(z)$、$\chi(z)$ 表示位移 u、v 的表达式.

为求应力分量 σ_x、σ_y、τ_{xy}，我们在（13）式两边对 x 求导：

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+i\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}$$

$$=\overline{\psi^0(z)}+z\psi^{[2]}(z)+\psi^0(z)+\chi^{[2]}(z) \tag{15}$$

对 y 求导后乘以 i：

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$$

$$=-\overline{\psi^0(z)}+z\psi^{[2]}(z)-\psi^0(z)+x^{[2]}(z) \tag{16}$$

由（15）（16）两式相减得：

$$\sigma_x+\sigma_y=2\overline{\psi^0(z)}+2\psi^0(z)=4Re\psi^0(z) \tag{17}$$

由（15）（16）两式相加得：

$$\sigma_y-\sigma_x-2i\tau_{xy}=2[z\psi^{[2]}(z)+\chi^{[2]}(z)] \tag{18}$$

由（17）、（18）两式可知，σ_x、σ_y、τ_{xy}均可由共轭解析函数$\psi(z)$、$\chi(z)$表示．

§4 反向保形变换的应用

共轭解析函数具有反向保形变换的性质，我们可以利用这一性质，求解给定边界条件下平面场的复形．它的方法是，把一个边界形状比较复杂的平面场利用共轭解析函数的反向保形变换转化为边界形状比较简单的平面场，再去求解．下面我们举例说明．

例4．一个甚大金属导体，挖去一个角度为60°的二面角，让导体充电到电势V_0，试求二面角内电场中的电势分布．

解 把导体看作无限长，只须研究一个横截面，把这横截面叫做z平面．在z平面上，二面角表现为顶角为$\frac{\pi}{3}$的角域（图1）．

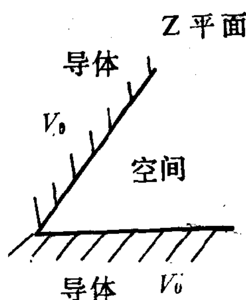


图1

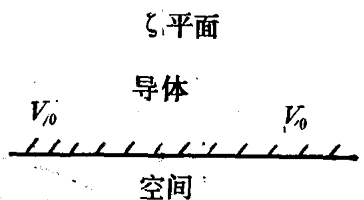


图2

把顶角放大到三倍则成为π，而顶角为π的角域变为半平面，问题容易解得多．

事实上，作变换 $\zeta=\overline{z^3}$，在ζ平面上，上半平面是导体，下半平面是空间（图2．在下半平面的电势分布易于解出为

$$u=V_0-C\eta$$

常数 C取决于导体表面的电荷密度．

回到 z 平面，角域中的电势分布为

$$u=V_0-CI_m\zeta=V_0-CI_m\overline{z^3}$$
$$=V_0+C(3x^2y-y^3)$$

例5．研究平底水槽中的水流动，槽底有一竖立的薄片阻挡水流（图3）．求流动的复形及流速．

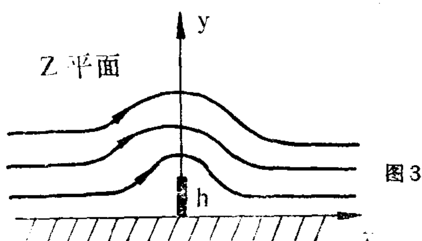


图3

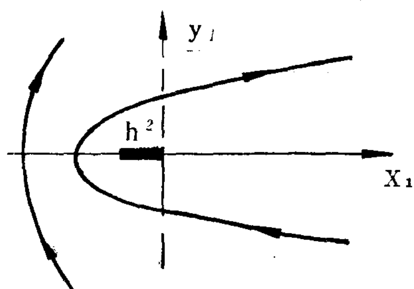


图4

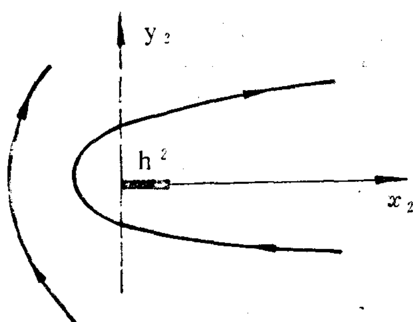


图 5

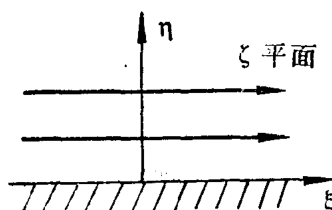


图 6

解 这个问题的困难来自槽底的薄片，它的特征是两边各有一个直角，作变换：

$$z_1 = z^2$$

直角加倍变成平角，如图4．整个水槽底加上竖立的薄片变为z_1平面的实轴上从$-h^2$经原点向$+\infty$去的割线两岸，这样的问题简单得多。

z_1平面的割线端点不在原点，作变换：

$$z_2 = z_1 + h^2$$

将割线端点移到原点（图５）．

割线两岸为夹角 2π 的两根直线，作变换：

$$\zeta = \sqrt{z_2}$$

夹角变为 π．即割线两岸成为 ζ 平面的实轴（图６）．

ζ 平面上流动的复形显然是

$$f(\zeta) = C\zeta \qquad (C>0)$$

回到 z 平面

$$C\zeta = C\sqrt{z_2} = C\sqrt{z_1+h^2} = C\sqrt{z^2+h^2}$$

此即为原流动的复形．

$$流速 = \overline{\left(C\sqrt{z^2+h^2}\right)'} = C\overline{\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+h^2}}\right)}$$

为了说明常数 C 的意义，考察远离竖立薄片地方的流速

$$\lim_{z\to\infty} C\overline{\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+h^2}}\right)} = C\overline{\left(\lim_{z\to\infty}\frac{z}{\sqrt{z^2+h^2}}\right)} = C$$

这就是说，流速 x、y 分量：$v_x = C$，$v_y = 0$．于是，远离竖立薄片的地方，水是平行槽底流动的，流速就是 C．

参 考 文 献

[1] L. Bers, Theory of pseudo-analytic functions, New York University, 1953.

[2] Cars. V. Ahlfors, Complex analysis, 1979.

[3] И. Н. Векуа, Обобщённые Аналитеческий Функции Комплесного Перетенмоло, 1948.

[4] И. И. Привалов, Бведение в Теорию Функций Комплекского Переменмого, 1960.

[5] М.А.Чеврентьев и Б.В.Шабат, Методы Теории Функций Комлесмого Переменного, 1951.
[6] 依、涅．维库阿，广义解析函数，人民教育出版社，1964.
[7] R．柯朗，D．希尔伯特，数学物理方法，科学出版社，1977.
[8] 张宗燧，电动力学及狭义相对论，科学出版社，1957.
[9] 李政道，物理学中的数学方法，江苏科学技术出版社，1981.
[10] 樊大钧，数学弹性力学，新时代出版社，1983.
[11] 王龙甫，弹性理论，科学出版社，1979.
[12] 刘珍儒，关于半解析函数的几个充要条件及半解析开拓的R—S对称原理，北京工业大学学报，1986年第4期.
[13] 王见定，半解析函数，北京工业大学学报，1983年第3期.
[14] 王见定，“半解析函数”一文中两个定理的改进，北京工业大学学报，1984年第4期.
[15] 王见定，半解析函数存在的广泛性及两类半解析函数之间的相互转化，北京工业大学学报，1984年第4期.
[16] 王见定，半解析开拓，北京工业大学学报，1984年第4期.
[17] 王见定，与半解析函数定义等价的几个定理，北京工业大学学报，1986年期第1期.
[18] 王见定，复变函数分解定理，北京工业大学学报，1986年第2期.

结 束 语

半解析函数的研究还不完善，但已初具规模；共轭解析函数似乎不是什么新东西，仔细推敲，它是一个全新的函数类．由于我们在研究中大量运用了解析函数的性质，似乎手法也没有什么创新，实际上那只是为了证明简单．事实上，由于定义了共轭导数、共轭积分这样一些崭新的概念以及相应的一些运算法则，共轭解析函数的所有性质都可以在此基础上推导出来，而不必延用解析函数的手法．最后指出，我们完全可以仿半解析函数的方法定义半共轭解析函数，半解析函数已经得到的结果在半共轭解析函数中都有对应．为了避免重复，此书中不再论述．

[General Information]
书名=半解析函数共轭解析函数
作者=王见定
页数=100
SS号=10069575
DX号=
出版日期=1988年12月第1版
出版社=北京工业大学出版社